TEMA 3. Funciones. Cálculo diferencial

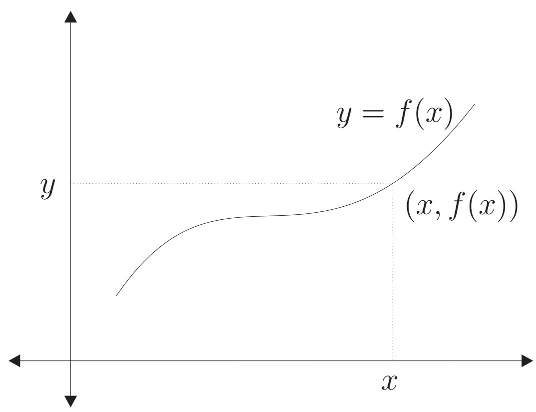
En este tema vamos a hacer un estudio preliminar de las funciones de una variable real y el importante concepto de derivada. Comenzaremos recordando las funciones básicas, para luego introducir la derivada y considerar algunas de sus aplicaciones.

3.1. Concepto de función

Decimos que hay una *correspondencia* entre dos conjuntos cuando existen unas determinadas reglas que permiten asociar elementos del primer conjunto (*conjunto inicial*) con elementos del segundo conjunto (*conjunto final*).

Una *aplicación* es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del conjunto final.

Cuando los conjuntos inicial y final son subconjuntos de $\mathbb{R}$, hablamos de *funciones reales de variable real*. Por tanto una función de variable real $f(x)$ es una aplicación $f : D \to \mathbb{R}$, de tal forma que a cada elemento $x \in D$ le hacemos corresponder un único número real $f(x)$. Al conjunto D, un subconjunto de los números reales, se le llama *dominio* de la función y se suele denotar por $\text{Dom}(f)$. Se llama *imagen* o *recorrido* de la función al conjunto de todos los valores que toma la función, es decir $\text{Im}(f) = \{f(x) : \ x \in D\}$. El conjunto de puntos del plano $G = \{(x, f(x)) : \ x \in D\}$ se llama *gráfica* de la función.



Dada una función $f(x)$ es siempre importante saber determinar su dominio, es decir, el conjunto de puntos para los que tiene sentido.

3.2. Propiedades de las funciones

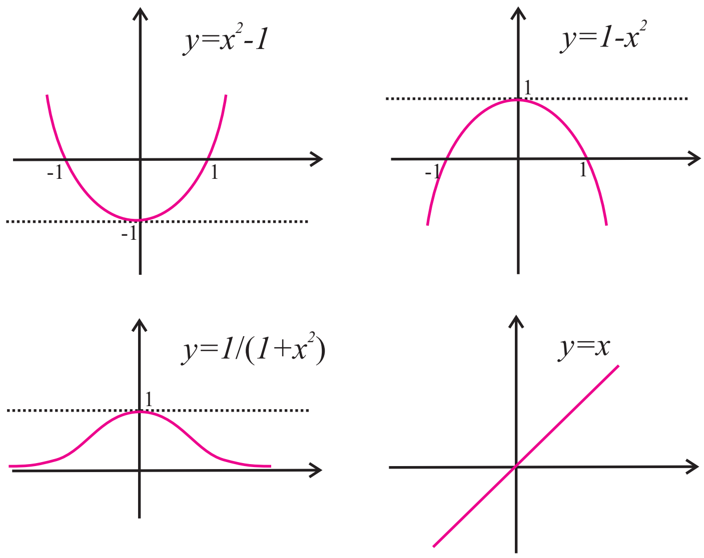
Las funciones de variable real con las que solemos trabajar disfrutan de diversas propiedades. A continuación veremos algunas de las básicas.

Acotación. Una función f está *acotada superiormente* si sus imágenes no superan cierto valor, esto es, cuando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para cualquier x del dominio de f. Se dice que M es una cota superior.

De la misma forma, la función f está *acotada inferiormente* si sus imágenes superan siempre un cierto número, es decir, si existe $m \in \mathbb{R}$ de tal forma que $f(x) \geq m$, para todo x en el dominio de f.

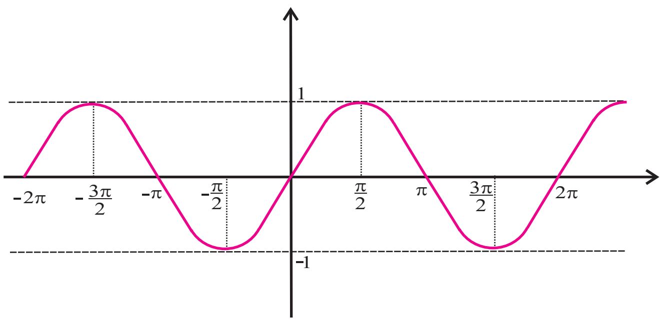
Decimos que una función f está *acotada* si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a que existe $M \geq 0$ de tal forma que $|f(x)| \leq M$, para todo x del dominio de la función.

Ejemplos. La función $f(x) = x^2 - 1$ sólo está acotada inferiormente ($f(x) \geq -1$) mientras que la función $g(x) = 1 - x^2$ lo está sólo superiormente ($g(x) \leq 1$). La función $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ está acotada ($|h(x)| \leq 1$)y la función $l(x) = x$ no está acotada ni superior ni inferiormente.



Periodicidad. Una función es *periódica de periodo* T ($T \neq 0$) cuando para todo x del dominio, se tiene que $x + T$ está en el dominio y $f(x + T) = f(x)$. Se llama *periodo fundamental* de f al periodo más pequeño de f.

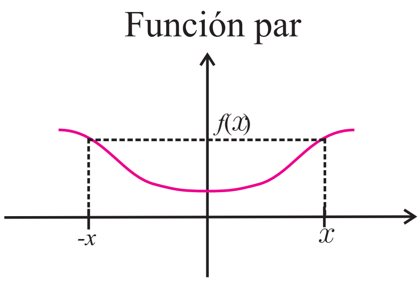
Ejemplo La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función periódica de periodo fundamental 2π.

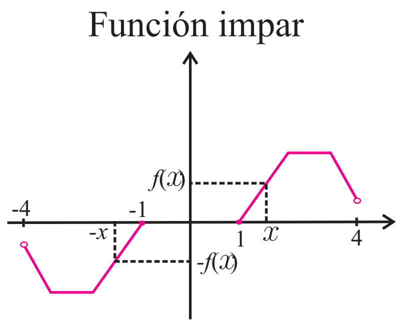


Simetrías. Se dice que una función f es *par* cuando, para cada x de su dominio, $-x$ es también del dominio y se satisface $f(-x) = f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Decimos que una función f es *impar* cuando, para cada x de su dominio, $-x$ pertenece también al dominio y se verifica $f(-x) = -f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Ejemplos





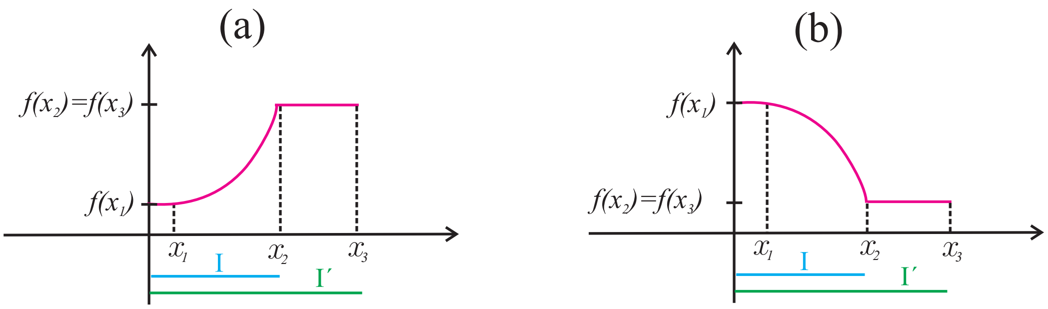
Algunas de las funciones con las que trabajaremo usualmente son pares o impares, pero también existen muchas funciones que no son ni pares ni impares, como $f(x) = x^2 + x$.

Crecimiento y decrecimiento. Supongamos que f es una función real de variable real e I un intervalo contenido en su dominio.

- f es *creciente en I* si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f es *decreciente en I* si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f es *estrictamente creciente en I* si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.
- f es *estrictamente decreciente en I* si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

- Decimos que f es *monótona en I* cuando es creciente, decreciente o constante en el intervalo.

Ejemplos. La función en (a) es creciente en el intervalo I' y es estrictamente creciente en I. En la figura (b) podemos observar que la función es decreciente en I' y estrictamente decreciente en el intervalo I.



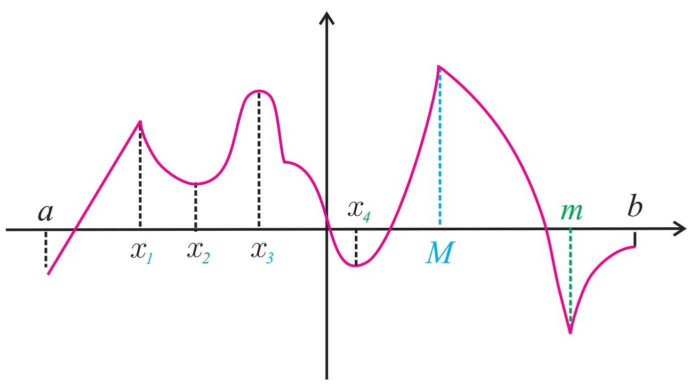
Máximos y mínimos. Se dice que un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *máximo absoluto* de f cuando $f(x_0)$ es el mayor valor que toma f en su dominio, esto es, $f(x_0) \geq f(x)$, cuando x pertenece al dominio.

Análogamente, decimos que un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *mínimo absoluto* de f cuando $f(x_0)$ es el menor valor que toma f en su dominio, es decir, $f(x_0) \leq f(x)$, para cada x del dominio.

Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *máximo relativo* si $f(x_0)$ es el mayor valor que toma f cerca del punto x_0.

Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *mínimo relativo* si $f(x_0)$ es el menor valor que toma f cerca de x_0.

Ejemplo.



En la gráfica de la función f se observa que el dominio de f es $[a, b]$. El punto $(M, f(M))$ es el máximo absoluto, mientras que los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_3, f(x_3))$ son máximos relativos. Asimismo, el punto $(m, f(m))$ es el mínimo absoluto, mientras que los puntos $(x_2, f(x_2))$ y $(x_4, f(x_4))$ son mínimos relativos.

3.3. Funciones elementales

A continuación vamos a analizar las características de algunas funciones básicas con las que solemos trabajar.

• **Funciones polinómicas**

Son funciones definidas en términos de un polinomio de grado n, es decir:

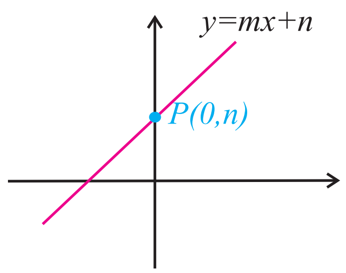
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

siendo $n \geq 1$ y $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n \in \mathbb{R}$. El dominio de estas funciones es siempre $\mathbb{R}$, pero sus propiedades dependen del grado n y de los coeficientes.

Las operaciones usuales, suma, resta y producto de funciones polinómicas son nuevamente funciones polinómicas. Sin embargo, el cociente de funciones polinómicas no es, en general, una función polinómica.

Analicemos las características más importantes cuando $n = 1$ y $n = 2$.

$\boxed{n = 1}$ (Lineal) Las funciones cuya representación gráfica es una recta se suelen llamar lineales (con más precisión, se suele llamar lineales cuando las rectas pasan por el origen y afines cuando no). Su expresión es de la forma $y = mx + n$, siendo m la *pendiente* de la recta y n la *ordenada en el origen*.



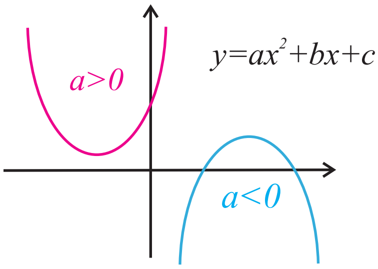
Las rectas de la forma $y = a$ son rectas horizontales (de pendiente 0), mientras que las rectas de la forma $x = a$, son verticales (y por tanto no se trata de funciones).

$\boxed{n = 2}$ (Cuadrática) Una función cuadrática en una función polinómica que viene dada por un polinomio de grado 2. Dada una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, su gráfica es una parábola con las siguientes características:

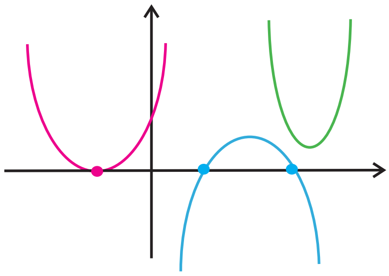
- Si $a > 0$ las ramas van hacia arriba y si $a < 0$ hacia abajo.

- Las abcisas de los puntos de corte de la parábola con el eje OX son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Por tanto, el número máximo de puntos de corte con el eje OX es de 2, pudiendo darse el caso de que exista sólo 1 o incluso, ninguno. Con el eje OY la parábola siempre se corta en el punto $P = (0, c)$.

- En el vértice la parábola presenta un máximo o mínimo, según sea a negativo o positivo. La abcisa del vértice viene dada por $x = -\dfrac{b}{2a}$.



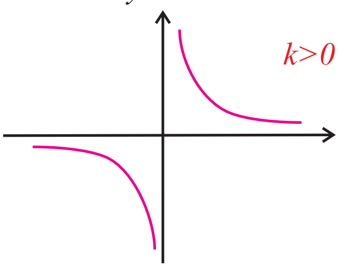
Puntos de corte con OX

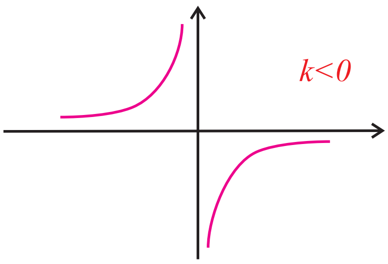


• **Funciones racionales**

Son funciones de la forma
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. El dominio de estas funciones es el conjunto de números reales para los que $Q(x) \neq 0$.

En particular la *función de proporcionalidad inversa* $f(x) = \dfrac{k}{x}$, (donde k es una constante no nula) es una función racional. Esta función está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y su gráfica es simétrica respecto del origen y recibe el nombre de *hipérbola equilátera*.





• **Función exponencial**

Es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número positivo distinto de 1. La condición sobre la base a hace posible que el exponente pueda tomar cualquier valor. Por tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$. Por otro lado, los valores que toma la función son siempre positivos, siendo su recorrido $(0, +\infty)$. La función exponencial es una función acotada inferiormente.

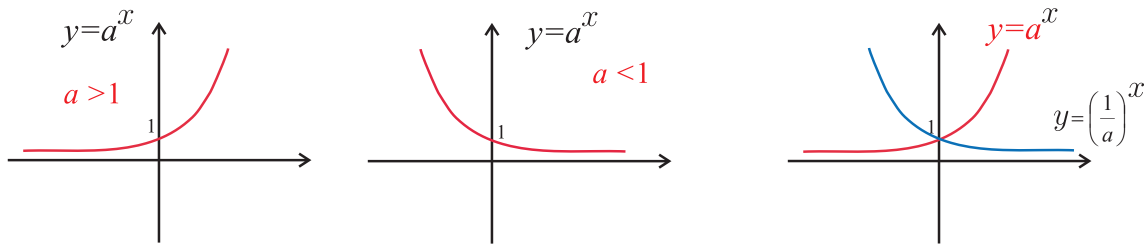
Una función exponencial especialmente importante es $y = e^x$, cuya base es el número e que se define como
$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
y cuyo valor aproximado es $e = 2{,}718281...$

La gráfica de una función exponencial viene condicionada fundamentalmente por el valor de la base a, de tal forma que:

- Si $a > 1$ entonces la función es estrictamente creciente, converge a 0 cuando x tiende a $-\infty$ y crece a infinito cuando $x \to +\infty$. En este caso, cuanto mayor sea la base a, más rápido es el crecimiento de la función.

- Si $a \in (0, 1)$ la función es estrictamente decreciente, tiende a infinito cuando x tiende a $-\infty$ y converge a 0 cuando x toma valores grandes. Además se tiene que cuanto más pequeño es el valor de la base a, más rápido converge a 0.

Se observa también que las gráficas de las funciones $y = a^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto al eje OY.



• **Función logarítmica**

La función $y = \log_a x$, siendo a un número positivo distinto de 1, es la función inversa de la función exponencial $y = a^x$, esto es,

$$y = \log_a x, \text{ si y sólo si } x = a^y.$$

Así $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, $\log_{1/2} 4 = -2$, $\log_7 7 = 1$ y $\log_5 1 = 0$.

Como función inversa de la exponencial, se concluye que el dominio de la función logarítmica es $(0, +\infty)$ y su recorrido $\mathbb{R}$. Queda claro entonces que no tienen significado expresiones como $\log_2(-3)$, $\log_2 0$, $\log_{-2} 3$, $\log_1 8$.

Las bases más usadas son $a = 10$ y $a = e$. Si no se indica la base, se entiende que es $a = 10$ y se trata del *logaritmo decimal*; por ejemplo $\log 100 = 2$. Para el caso $a = e$, se llama *logaritmo neperiano* o *logaritmo natural* y se escribe de cualquiera de las siguientes maneras:

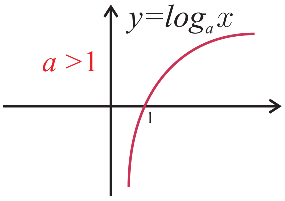
$$\log_e x = \ln x = \text{ L}x.$$

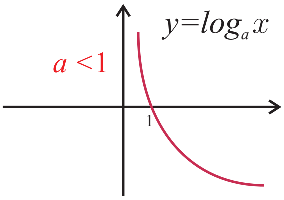
Teniendo presente que las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$, podemos obtener la gráfica de la función logarítmica a partir de la correspondiente exponencial. De esta forma, también en este caso la base a condiciona la forma de la gráfica.

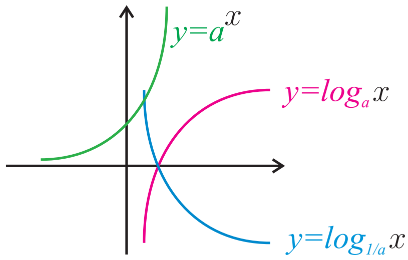
- Si $a > 1$ entonces es estrictamente creciente, y si $x \to 0$ por la derecha, la función tiende a $-\infty$ y cuando $x \to +\infty$, la función tiende a $+\infty$.

- Si $0 < a < 1$ la función f es estrictamente decreciente, tiende a $+\infty$ cuando x converge a 0 (por la derecha) y tiende a $-\infty$ cuando x toma valores muy grandes.

Se tiene, además, que las gráficas de las funciones $y = \log_a x$ e $y = \log_{1/a} x$ son simétricas respecto al eje OX.







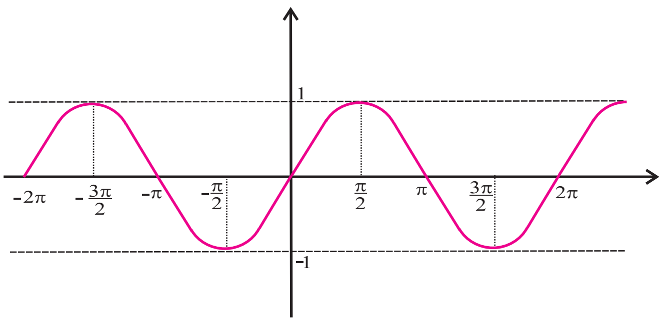
• **Funciones trigonométricas**

Estas funciones se definen a partir de las razones trigonométricas. Las más destacadas son el seno y el coseno.

Función seno. La función seno $f(x) = \operatorname{sen} x$ hace corresponder a cada valor x de un ángulo, medido en radianes, el valor del seno de dicho ángulo.

Las propiedades más importantes de esta función trigonométrica se recogen a continuación.

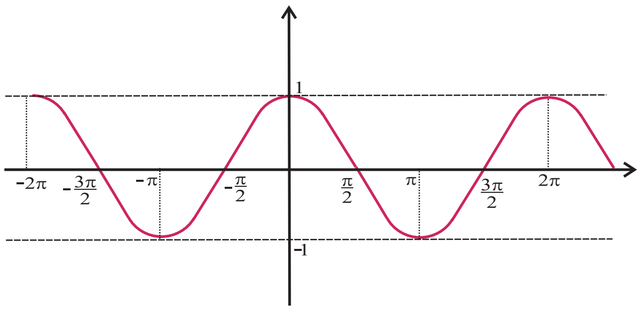
- Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido $[-1, 1]$.
- Es una función acotada en $\mathbb{R}$.
- Es una función impar y periódica de periodo 2π.
- Posee infinitos máximos absolutos en los puntos de abcisa $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor 1.
- Asimismo presenta infinitos mínimos absolutos en los puntos de abcisa $x = \pi/2 + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor -1.
- Corta al eje OX en los puntos de abcisa $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Función coseno. La función coseno, $f(x) = \cos x$, hace corresponder a cada valor x de un ángulo, medido en radianes, el valor del coseno de dicho ángulo.

Las propiedades de la función coseno son análogas a las de la función seno como indicamos a continuación.

- Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido $[-1, 1]$.
- Es una función acotada en $\mathbb{R}$.
- Es una función par y periódica de periodo 2π.
- Posee infinitos máximos absolutos en los puntos de abcisa $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor 1.
- Asimismo presenta infinitos mínimos absolutos en los puntos de abcisa $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor -1.
- Corta al eje OX en los puntos de abcisa $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.



3.4. Composición de funciones

A partir de todas las funciones anteriores podemos generar infinitas más mediante combinaciones de ellas, por ejemplo sumándolas o restándolas, multiplicándolas o dividiéndolas (ésto último solo cuando el denominador no se anule).

Pero hay una operación más importante: la composición de funciones, que nos permite generar infinidad de funciones más. Dadas $f(x)$ y $g(x)$, la composición $f \circ g$ se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Es decir, aplicamos primero $g(x)$ y al resultado le aplicamos f. El dominio de $f \circ g$ está formado por aquellos puntos x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Ejemplo 1. (a) Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \cos x$, tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = e^{\cos x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = \cos(e^x).$$

En particular, vemos que $f \circ g$ y $g \circ f$ no coinciden en general.

(b) Vamos a determinar el dominio de la función

$$f(x) = \log(x + 2).$$

Nótese que $f = g \circ h$, donde $g(x) = \log x$ y $h(x) = x + 2$.

La función $x+2$ está definida en todo $\mathbb{R}$, pero para que el logaritmo tenga sentido necesitamos

$$x + 2 > 0.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(f) = (-2, +\infty).$$

(c) Sea $f(x) = \sqrt{\log(2x)}$. En primer lugar necesitamos que $x > 0$, para que el logaritmo tenga sentido. Además, sólo podemos calcular raíces de números positivos (o cero), con lo que necesitamos

$$\log(2x) \geq 0, \quad \text{es decir } 2x \geq 1.$$

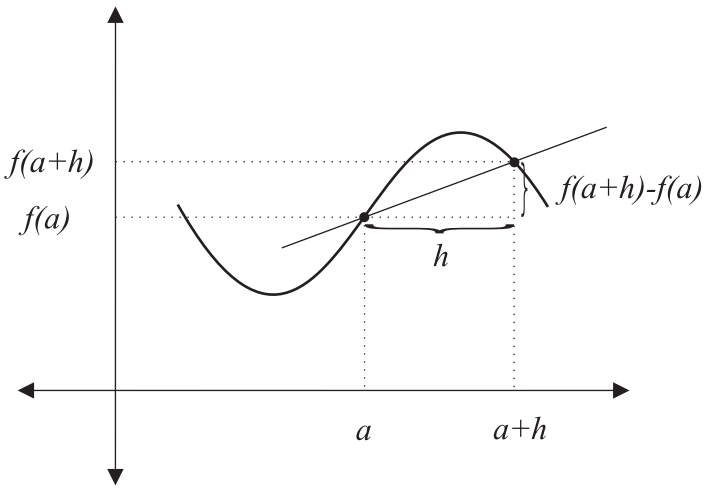
Luego el dominio es el intervalo $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

3.5. Concepto de derivada de una función

Analizaremos en esta sección la derivada de una función de una variable. Uno de los lugares en los que surge la necesidad de calcular la derivada es en la determinación de rectas tangentes a una curva: si tenemos una curva $y = f(x)$, calcularemos la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = a$, como límite de las pendientes de rectas secantes. Las pendientes de las rectas secantes son:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ ,$$

donde $h \neq 0$ (véase la figura).



Cuando al tomar valores cada vez más pequeños de h, las pendientes anteriores se acercan a un valor, éste se llama la derivada de la función $f(x)$ en $x = a$, y se denota por

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ .$$

Decimos que la función $f(x)$ es derivable en $x = a$.

Puesto que $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $x = a$, la ecuación de tal recta es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Ejemplo 2. (a) Para la función $f(x) = x^2$ tenemos, en un punto a arbitrario:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{(a^2+2ah+h^2)-a^2}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a.$$

(b) Si $f(x) = \sqrt{x}$, tenemos, para $a > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\,\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\ &= \frac{(a+h)-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\,.\end{aligned}$$

Por eso:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,.$$

Observemos que esta derivada tiene sentido solamente cuando $a > 0$.

Observación 1. Otra situación típica donde nos encontramos con el concepto de derivada es en la definición de velocidad instantánea. Supongamos que un móvil se desplaza a lo largo de una recta, de forma que su posición en el instante t está dada por $e(t)$. Para $h > 0$, la velocidad media del móvil en el intervalo $[t, t+h]$ es

$$\frac{e(t+h)-e(t)}{h}$$

y por tanto la velocidad instantánea en el tiempo t se obtendrá al hacer $h \to 0$, con lo que ésta coincide con la derivada $e'(t)$.

Decimos que una función es derivable en un intervalo abierto (a, b) cuando lo es en todos sus puntos.

En general, usaremos la notación estándar $f'(x)$ para representar a la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x, pero hay otras formas de denotar la derivada, por ejemplo:

$$y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx}(x),\ D_x y,\ D_x f(x).$$

3.6. Cálculo de derivadas

Para calcular derivadas de funciones, normalmente no hacemos uso de la definición a través del límite. Es más práctico elaborar una tabla con las derivadas de las funciones elementales más usadas. Las derivadas de las funciones más habituales son:

$$\begin{aligned}&(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\\ &(e^x)' = e^x\\ &(\ln x)' = \frac{1}{x}\\ &(\operatorname{sen} x)' = \cos x\\ &(\cos x)' = -\operatorname{sen} x\\ &(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.\end{aligned}$$

Para poder derivar funciones son útiles las siguientes reglas operacionales.

Propiedades Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces:

1. $(kf(x))' = kf'(x)$, $k \in \mathbb{R}$;
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Ejemplo 3. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$. Escribimos $f(x)$ como una potencia: $f(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}$.
Por tanto:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{5}}.$$

(b) Para $f(x) = x^3 - 4x + 5$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 4$.

(c) Cuando $f(x) = 3x^2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 2\cos x + 2x \operatorname{sen} x \\ &= 8x \operatorname{sen} x + (3x^2 - 2)\cos x. \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \dfrac{5x-2}{x^2+1}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(x^2+1) - 2x(5x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{5x^2 + 5 - 10x^2 + 4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(e) $f(x) = x \operatorname{sen} x e^x$. Utilizando la fórmula para la derivada de un producto dos veces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sen} x e^x + x(\operatorname{sen} x e^x)' = \operatorname{sen} x e^x + x(\cos x e^x + \operatorname{sen} x e^x) \\ &= \operatorname{sen} x e^x + x \cos x e^x + x \operatorname{sen} x e^x = e^x((1+x)\operatorname{sen} x + x\cos x). \end{aligned}$$

Uno de los resultados más importantes a la hora de derivar es la regla de la cadena, que nos indica cómo se deriva una función compuesta.

Teorema 4. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces $(f \circ g)(x)$ también lo es, y además:*

$$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x).$$

Ejemplo 5. (a) Cuando $f(x) = (x^2+1)^3$,

$$f'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2.$$

(b) $f(x) = \operatorname{tg}(3x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = \frac{3}{\cos^2(3x)}.$$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}^3(4x)$:

$$f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(4x) \cdot \cos(4x) \cdot 4 = 12\cos(4x)\operatorname{sen}^2(4x).$$

(d) $f(x) = e^{x^3}$:

$$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

(e) $f(x) = \log(2x^2+x-1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2+x-1} \cdot (4x+1) = \frac{4x+1}{2x^2+x-1}.$$

(f) $f(x) = \cos(\log(\operatorname{tg}(3x)))$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen}(\log(\operatorname{tg}(3x))) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 \\ &= -\frac{3\operatorname{sen}(\log(\operatorname{tg}(3x)))}{\operatorname{sen}(3x)\cos(3x)}. \end{aligned}$$

3.7. Derivadas de orden superior

En algunas situaciones es necesario derivar una función más de una vez. Por ello se definen las derivadas de orden superior: la derivada segunda de una función $f(x)$ se define como la derivada de la función derivada:

$$f''(x) = (f'(x))',$$

y análogamente las derivadas tercera, cuarta, etcétera.

Ejemplo 6. Si queremos calcular la derivada tercera de la función $f(x) = x^3 - 2x + 1 + xe^{x^2} - \operatorname{sen} x$, obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2 + e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} - \cos x \\ f''(x) &= 6x + 2xe^{x^2} + 4xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2} + \operatorname{sen} x \\ f'''(x) &= 6 + 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + 4e^{x^2} + 8x^2e^{x^2} + 12x^2e^{x^2} + 8x^4e^{x^2} + \cos x \\ &= 6 + (8x^4 + 24x^2 + 6)e^{x^2} + \cos x\ . \end{aligned}$$

3.8. Derivación implícita

Las funciones no siempre vienen definidas explícitamente en la forma $y = f(x)$, sino que están dadas a través de una relación del tipo $F(x, y) = 0$. Por ejemplo:

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2.$$

Para calcular la derivada de y respecto a x no es necesario despejar y en esta relación. Basta derivar en la expresión dada, teniendo en cuenta que $y = y(x)$ y usar la regla de la cadena. Así, para la función anterior:

$$2x - 6y^2y' + 4y' = 0,$$

de donde

$$y' = \frac{2x}{6y^2 - 4} = \frac{x}{3y^2 - 2} \ .$$

Ejemplo 7. Para hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, derivamos implícitamente: $2x + 8yy' = 0$, es decir,

$$y' = \frac{-2x}{8y} = -\frac{x}{4y}.$$

En el punto $x = \sqrt{2}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, tenemos $y' = 1/2$ y por tanto la ecuación de la recta tangente es

$$y + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}),$$

es decir, $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$.

3.9. Aplicaciones de la derivada

Veamos finalmente algunas de las múltiples aplicaciones que tiene la derivada, entre otras cosas a problemas geométricos y físicos.

• *Cálculo de rectas tangentes y normales*

Tal y como hemos visto, una de las motivaciones del cálculo de derivadas es la determinación de rectas tangentes a una curva en cualquiera de sus puntos.

Ejemplo 8. Hallar en qué puntos de la curva $y = x^3 - 9x^2 + 21x$ la tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x - 3y + 2 = 0$.

La recta dada tiene pendiente $m = 4/3$ y por tanto sus perpendiculares tendrán pendiente $m' = -3/4$. Derivamos en la ecuación de la curva:

$$y' = 3x^2 - 18x + 21.$$

Por tanto necesitamos que $3x^2 - 18x + 24 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $x = 2$ y $x = 4$, que corresponden a los valores $y = 14$ e $y = 4$. Así, los puntos pedidos son

$$(2, 14) \quad \text{y} \quad (4, 4).$$

• *Crecimiento y decrecimiento*

Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función real se pueden determinar con ayuda de las derivadas. Más precisamente, dada una función $f(x)$ derivable en el intervalo (a, b), se tiene:

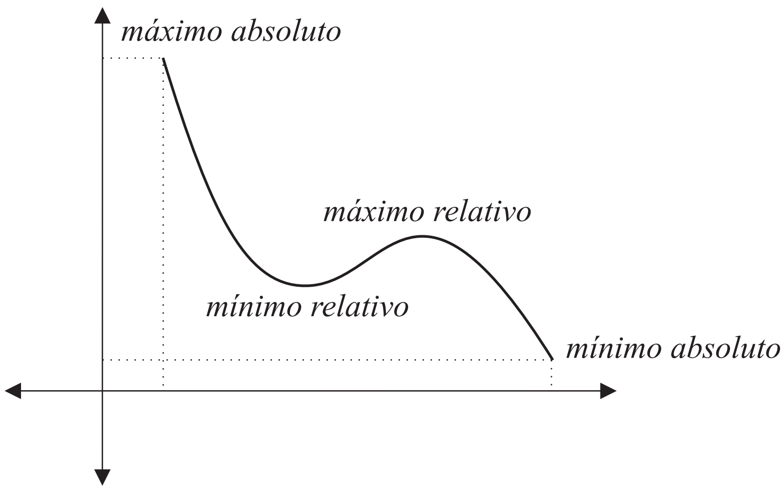
- si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, $f(x)$ es creciente en dicho intervalo;
- si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, $f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

También hay una relación entre las derivadas y los máximos y mínimos locales:

- si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo máximo local en $x = a$;
- si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = a$.

Lo anterior muestra que para determinar los máximos y mínimos locales de una función derivable tenemos que hallar las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. Éstas nos darán los candidatos a máximos y mínimos locales, y tendremos que comprobar el signo de la derivada segunda para decidir.

Observación 2. Hay que tener mucho cuidado a la hora de calcular los máximos y mínimos globales de una función en un intervalo $[a, b]$. De hecho, puede ocurrir que los puntos en los que se anula la derivada sean solamente máximos y mínimos locales, mientras que el máximo o mínimo global puede alcanzarse en los extremos del intervalo. Es justamente lo que ocurre para la función cuya gráfica aparece en la figura.



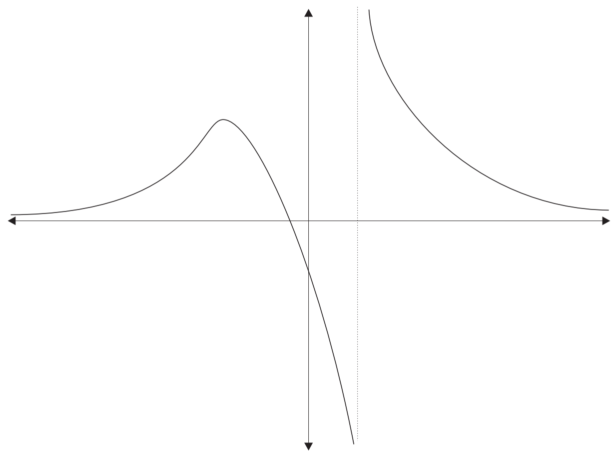
Ejemplo 9. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos de la función racional

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

En primer lugar, calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6} = \frac{x-1-3(x+1)}{(x-1)^4} = -2\frac{x+2}{(x-1)^4}.$$

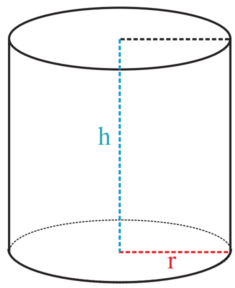
Como el denominador es siempre positivo, el signo de la derivada depende solo del numerador. Por tanto, $f'(x) > 0$ cuando $x < -2$, $f'(x) = 0$ si $x = -2$ y $f'(x) < 0$ si $x > -2$, $x \neq 1$. De esta forma vemos que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$ y decreciente en $(-2, 1)$ y en $(1, +\infty)$. Se alcanza un mínimo local en $x = -2$, que sin embargo no es absoluto, puesto que la función se va a menos infinito cuando x tiende a 1 por la izquierda. Tampoco hay máximos absolutos ya que la función se va a más infinito cuando x tiende a uno por la derecha. La gráfica de la función es aproximadamente como se muestra en la figura.



• *Problemas de optimización*

Muchos problemas prácticos se reducen a la determinación de máximos y mínimos de una función de variable real. Por ejemplo, en muchas situaciones se trata de determinar las dimensiones de un recipiente (con una forma determinada) para maximizar o minimizar alguna de sus características: volumen, coste, etc. Lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo 10. Los botes ordinarios de cerveza, refrescos, etc., son de forma cilíndrica y tienen una capacidad de 1/3 de litro. Se pide calcular las dimensiones óptimas para que el coste del material empleado en su construcción sea mínimo.



Si r es el radio del cilindro y h su altura (véase la figura), la superficie total es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Si medimos r y h en centímetros, por ejemplo, y tenemos en cuenta que un litro equivale a 1000 cm^3, tenemos una relación entre r y h, que viene dada por la condición de que el volumen sea $1000/3$ cm^3:

$$\pi r^2 h = \frac{1000}{3}\ .$$

Por tanto, se trata de minimizar la función

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{3r}.$$

Claramente, debe tenerse $0 < r < \infty$. Si derivamos e igualamos a cero:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{3r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{3\pi}} = 3'76 \text{ cm}.$$

Además, en $r = 3'76$ se tiene un mínimo local: $S''(3'76) > 0$. Puesto que $S(r)$ se va a infinito cuando r tiende a cero o a infinito, resulta que el mínimo es global, y las dimensiones pedidas son entonces $r = 3'76$ cm, $h = 7'52$ cm.