TEMA 1. Álgebra matricial y programación lineal

Muchos problemas en las matemáticas y sus aplicaciones conducen a sistemas de ecuaciones lineales, del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

donde a_{ij}, b_i son números reales. Una forma satisfactoria de discutir estos sistemas (y de resolverlos) es introduciendo las matrices y reescribiéndolos en la llamada forma matricial. En este tema estudiaremos las matrices y sus propiedades, así como la discusión y resolución de sistemas.

1.1. Matrices

Una matriz real de tamaño $m \times n$ es un conjunto de mn elementos distribuidos en m filas y n columnas. Cada fila tiene n elementos, mientras que cada columna tiene m:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Normalmente, las matrices siempre se denotan con letras mayúsculas, y se suelen abreviar así:

$$A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}.$$

Observemos que en el elemento a_{ij} el subíndice i hace alusión a la fila y el j a la columna. El conjunto de las matrices $m \times n$ con elementos reales se suele denotar por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Por su especial relevancia en las aplicaciones, destaquemos algunos tipos particulares de matrices:

Matriz fila (vector fila): $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ $\quad 1 \times n$

Matriz columna (vector columna): $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ $\quad m \times 1$

Matriz cuadrada: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad n \times n$

Ejemplo 1. Veamos algunos ejemplos de matrices, en particular de los tipos especiales anteriores:

$$\text{Matriz } 2 \times 3: \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

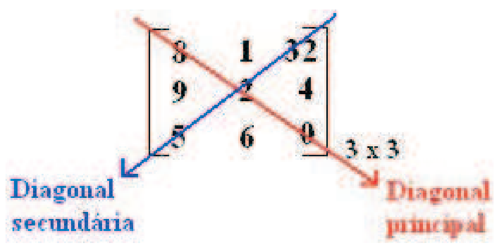
$$\text{Matriz } 2 \times 2 \text{ (cuadrada)}: \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz } 3 \times 3 \text{ (cuadrada)}: \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & \sqrt{2} & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz } 1 \times 3 \text{ (fila)}: \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz } 3 \times 1 \text{ (columna)}: \qquad A = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Las matrices cuadradas suelen ser las más usadas en la práctica. Veamos a continuación algunos tipos especiales de éstas. Para ello, consideramos en primer lugar las llamadas diagonales principal y secundaria de una matriz:



- Matriz identidad. Es una matriz cuadrada de orden n que tiene unos en la diagonal principal y ceros en todos los demás lugares. La denotaremos por I_n:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

  Por ejemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Matriz diagonal. Los elementos que están fuera de la diagonal principal son nulos:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

  Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Matriz triangular. Es la que tiene todos los elementos por debajo o por encima de la diagonal principal nulos. En el primer caso se llama triangular superior y en el segundo triangular inferior.

  Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

  son triangulares superior e inferior, respectivamente.

1.2. Operaciones con matrices

Veamos las propiedades básicas con matrices reales.

Suma y resta. Dadas dos matrices $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$ y $B = \{b_{ij}\}_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$ *del mismo tamaño* $m \times n$, su suma es una matriz $C = \{c_{ij}\}_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$, que se obtiene sumando los términos que ocupan el mismo lugar. Es decir, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Análogamente se define la resta de matrices.

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} = C.$$

Producto por un escalar. El producto de un escalar (i. e. un número) $\lambda \in \mathbb{R}$ por una matriz $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$ da lugar a una nueva matriz λA, que se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz A por λ, es decir, $\lambda A = \{\lambda a_{ij}\}_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. (a) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos calcular $2A - 3B$, como sigue:

$$2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

no se pueden sumar.

Producto de matrices. Para que dos matrices se puedan multiplicar, el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda. Sean pues $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. El producto $A \cdot B$ es otra matriz C de orden $m \times p$, dada por $C = \{c_{ij}\}_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$, siendo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq p.$$

Ejemplo 3. (a) Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

no se pueden multiplicar.

(b) Dadas las matrices

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad W = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 9 & 1 \\ 7 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

su producto $P = Q \cdot W$ es una matriz 3×4, dada por:

$$P = QW = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 9 & 1 \\ 7 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 4 & 56 & 8 \\ 7 & 5 & 5 & 1 \\ 18 & 14 & 35 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para obtener este producto, basta observar que el elemento que ocupa la fila i, columna j en la matriz P se obtiene multiplicando la fila i de la matriz Q por la columna j de la matriz W, como muestra la siguiente figura:

$$P = QW = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 9 & 1 \\ 7 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} = 5$$

$$P = \begin{bmatrix} 36 & 4 & 56 & 8 \\ 7 & 5 & 5 & 1 \\ 18 & 14 & 35 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) Si las matrices A y B están dadas por

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

respectivamente, tenemos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 14 & -14 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 & 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix},$$

Obtenemos así una importante conclusión: $A \cdot B \neq B \cdot A$, es decir, el producto de matrices *no es conmutativo*.

(d) Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $A \cdot B = 0$, pero $A \neq 0$, $B \neq 0$. Por tanto, a diferencia de lo que ocurre con los números reales, el producto de dos matrices no nulas puede dar lugar a una matriz nula.

(e) Tomemos una matriz 3×3 arbitaria: $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Se tiene:

$$AI_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A,$$

$$I_3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A.$$

Por tanto la matriz identidad I_3 hace las veces de elemento neutro para el producto entre matrices 3×3. Lo mismo ocurre en el caso general de matrices $n \times n$ con I_n.

1.3. Determinantes

En esta sección introducimos el concepto importante de determinante de una matriz *cuadrada*. Así que en todo lo que sigue pensaremos siempre en matrices cuadradas.

Un determinante es un número real que se asocia a una matriz cuadrada, que refleja ciertas propiedades de la matriz. Comencemos considerando el caso de una matriz 2×2, $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Definimos su determinante como:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para definir el determinante de matrices de orden superior, necesitamos introducir previamente dos conceptos: los de menor y adjunto de una matriz.

Dada una matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$, llamamos menor (complementario) correspondiente al elemento a_{ij} al determinante de la matriz de orden $n-1$ que se obtiene al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima. Lo denotaremos M_{ij}. Cuando dotamos al menor de un signo, obtenemos el *adjunto* correspondiente al elemento a_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|.$$

Una forma útil de recordar cómo adjudicar los signos es la siguiente: a los elementos de la diagonal principal siempre les corresponde un signo $+$, y luego el signo va alternándose.

Así, para matrices 3×3:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

y para 4×4:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene nueve adjuntos:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ahora podemos definir el determinante para una matriz de orden $n \times n$ con $n \geq 3$: si $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$, definimos

$$\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.$$

Ésta es una definición por recurrencia, porque nos permite calcular determinantes de un cierto orden en términos de determinantes de órdenes inferiores. Así, para calcular el determinante de una matriz 4×4 necesitamos calcular 4 determinantes de orden 3×3, y para evaluar cada uno de estos, hay que calcular 3 determinantes de orden 2×2.

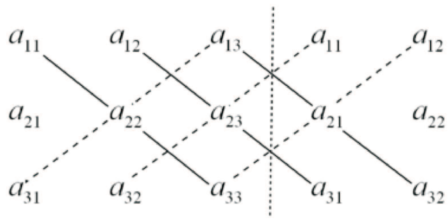
Ejemplo 5. Para la matriz A del ejemplo anterior:

$$|A| = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 11 + 3 \cdot (-3) = -10.$$

En el caso particular de una matriz 3×3 tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

Observemos que se trata de una suma de seis términos, tres de ellos con signo positivo y los otros tres con signo negativo. Una forma útil de recordar el valor de este determinante es la llamada *regla de Sarrus*, que se puede recordar de la siguiente forma:



Los productos de las diagonales principales (la línea continua) van con signo más y los de las diagonales secundarias (línea discontinua) con signo menos.

Ejemplo 6. Siguiendo con la matriz A de los ejemplos anteriores, si aplicamos la regla de Sarrus para calcular su determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 + 0 - 6 - 4 - 0 = -10,$$

valor que, por supuesto, coincide con el obtenido anterioremente.

1.4. Propiedades de los determinantes

Veamos a continuación algunas propiedades de los determinantes. Muchas de ellas son importantes porque nos permiten simplificar su cálculo. Pero primero introduzcamos el concepto de combinación lineal: dados los vectores (fila o columna) $v_1, \ldots, v_k$, una combinación lineal de ellos es una expresión de la forma:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son números reales.

Las propiedades en las que estaremos interesados son las siguientes:

(i) Un determinante se puede desarrollar por una fila o columna cualquiera. Es decir, para cualquier $i \in \{1, \cdots, n\}$:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Y también

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

para cualquier $j \in \{1, \cdots, n\}$.

(ii) Si en un determinante:

- hay una fila o columna de ceros;
- dos filas o columnas son iguales o proporcionales;
- una fila o columna es combinación lineal de otras;

entonces su valor es cero.

(iii) Al intercambiar dos filas o columnas de un determinante, éste cambia de signo.

(iv) Si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común, éste puede sacarse fuera del determinante.

(v) Si a los elementos de una fila o columna se les suma una combinación lineal de otras, el valor del determinante no cambia.

Estas propiedades, sobre todo la última, son importantes a la hora de simplificar los cálculos en determinantes de matrices grandes.

Ejemplo 7. (a) Tenemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Si intercambiamos dos de sus filas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Intercambiando dos columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & -3 \\ 15 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 32 = 160.$$

(c) El determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

es nulo, pues tiene dos filas iguales.

(d) Veamos cómo calcular un determinante de una matriz grande, por ejemplo, 4×4. La idea es desarrollar el determinante por una fila o columna, pero antes de hacerlo simplificar al máximo para que en el desarrollo aparezca el mayor número de ceros posible. Esto se hace principalmente con ayuda de la propiedad (v) anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -9 & -7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & 9 & 7 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 17 & 15 \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 17 & 15 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -(170 - 90) = -80.$$

1.5. Rango de una matriz

Antes de definir el rango de una matriz, necesitamos el concepto de independencia lineal de vectores. Dado un conjunto de vectores (fila o columna) $v_1, \ldots, v_k$, decimos que son linealmente dependientes si existen números reales no todos nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0.$$

En caso contrario, se dirá que son linealmente independientes. Observemos que un conjunto de vectores será linealmente dependiente cuando alguno de ellos se pueda poner como combinación de los otros.

Ejemplo 8. (a) Los vectores columna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. En efecto, si tuviéramos

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

deduciríamos que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(b) Los vectores $v_1 = (0 \quad 1)$ y $v_2 = (0 \quad 3)$ son linealmente dependientes, pues $v_2 = 3v_1$. Entonces $3v_1 - v_2 = 0$, es decir, podemos tomar $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, la consideraremos formada por m vectores fila o n vectores columna. Llamaremos rango de la matriz A, denotado por rango(A), al número máximo de filas linealmente independientes. Este valor coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes. En particular, siempre tenemos que rango$(A) \leq \text{mín}\{m, n\}$.

Ejemplo 9. Según el ejemplo anterior, la matriz I_3 tiene rango 3, mientras que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene rango 1.

Una forma útil de calcular el rango de una matriz es mediante el uso de determinantes (aunque veremos más adelante una manera alternativa de hacerlo): el rango coincide con el orden del mayor menor no nulo que podemos extraer de la matriz.

Ejemplo 10. (a) Consideremos la matriz 5×6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que rango$(A) \leq 5$. Observemos que hay una columna de ceros y que la primera columna y la quinta son proporcionales. Por otro lado, la sexta columna es la suma de la segunda y la tercera. Esto quiere decir que, en cuanto al rango se refiere, podemos olvidarnos de las columnas cuarta, quinta y sexta. Así que el rango será como mucho tres. Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Por tanto deducimos que rango$(A) = 3$.

(b) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

En este caso no es tan obvio que alguna fila o columna sea combinación lineal de otras. Calculemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 6 + 8 - 12 = 0.$$

Esto implica que el rango es como mucho 2. Pero como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

el rango es exactamente 2.

1.6. Operaciones elementales

Veremos para finalizar las llamadas operaciones elementales que nos permiten, entre otras cosas, calcular fácilmente el rango de una matriz cualquiera. Serán útiles asimismo para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Llamamos operaciones elementales sobre una matriz a las siguientes:

- Intercambiar dos filas o columnas.
- Sumar a una fila o columna otra fila o columna multiplicada por un escalar.
- Multiplicar una fila o columna por un escalar no nulo.

Una de las propiedades importantes de las operaciones elementales es que éstas no cambian el rango de una matriz. Así, para calcular el rango de una matriz dada podemos efectuar operaciones elementales sobre ella hasta obtener una matriz más sencilla y calcular el rango de esta última. Normalmente, el procedimiento a seguir es obtener una matriz triangular, para la que la determinación del rango es inmediata.

Ejemplo 11. Para calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

realizamos operaciones elementales sobre sus filas:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Las operaciones que hemos efectuado son las siguientes: intercambiar la primera y tercera filas, sumar a la tercera fila la primera multiplicada por 2 y restar a la tercera fila la segunda multiplicada por 3. Estas operaciones no alteran el rango de la matriz, y para esta última, el rango es claramente 3, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-4) \neq 0$$

Por tanto, $\text{rango}(A) = 3$.

1.7. Sistemas de ecuaciones lineales

A continuación nos ocuparemos de la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

donde a_{ij}, b_i son números reales. Observemos que el primer índice del coeficiente a_{ij} hace mención a la ecuación en la que aparece, mientras que el segundo indica la incógnita a la que acompaña.

Las primeras cuestiones importantes a tratar en relación con este sistema son: ¿existen soluciones? En tal caso, ¿cuántas? Por eso, haremos algunas definiciones preliminares.

Un sistema se llama *compatible* cuando tiene solución. En caso contrario, se dice que es *incompatible*. Cuando un sistema compatible tiene una única solución, se dice que es *determinado*. Si tiene más de una, se llama *indeterminado*. Una propiedad importante de los sistemas lineales es que, si tienen más de una solución, automáticamente tienen infinitas.

Por tanto, para un sistema dado tenemos tres posibilidades.

- Compatible determinado (solución única).
- Compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- Incompatible (sin soluciones).

Ejemplo 12. (a) El sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

es claramente incompatible.

(b) El sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

es compatible e indeterminado. De hecho, tiene infinitas soluciones, dadas por

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1-t \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) El sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

tiene una única solución, dada por $x = 0$, $y = 1$.

1.8. El teorema de Rouché-Fröbenius

Nuestro próximo objetivo es encontrar un método para decidir si un sistema dado es compatible o incompatible, determinado o indeterminado. Para ello, escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Resulta que la resolubilidad del sistema queda caracterizada en términos de dos matrices:

matriz del sistema: $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matriz ampliada: $$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Concretamente, la resolubilidad depende de la relación entre el rango de estas dos matrices. La conexión entre estos rangos y la resolubilidad del sistema la proporciona el teorema de Rouché-Fröbenius.

Teorema 13 (Rouché-Fröbenius)**.** *Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $A^* \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$ la matriz del sistema y matriz ampliada, respectivamente. Entonces:*

(a) *Si rango(A) $\neq$ rango(A^*), el sistema es incompatible.*

(b) *Si rango(A) $=$ rango(A^*), el sistema es compatible. Además:*

- *Si rango(A) $=$ rango(A^*) $= n$, es determinado.*

- *Si rango(A) = rango(A^*) $< n$, es indeterminado. El sistema admite infinitas soluciones que dependen de $n -$ rango(A) parámetros.*

Observemos que, puesto que A es una submatriz de A^*, siempre se tiene que rango(A) $\leq$ rango(A^*). También es inmediato que rango(A) $\leq$ mín$\{m, n\}$ y que rango(A^*) $\leq$ mín$\{m, n+1\}$.

Ejemplo 14. (a) Para el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x \quad - 2z = 1, \end{cases}$$

tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Como det $(A) = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, resulta que rango($A$) = 2.

Para calcular el rango de A^*, tomamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 2 - 1 = 4 \neq 0.$$

Entonces rango(A^*) = 3 > rango(A), con lo que el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

(b) Para el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = -13 \\ 3x - y + 2z = -3 \\ -3x + 5y - z = 9 \end{cases}$$

tenemos que det(A) $= 48 \neq 0$. Esto quiere decir que la matriz del sistema A tiene rango 3, y por tanto A^* también ha de tener rango 3. Como el rango de ambas matrices coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado: existe una única solución del mismo.

(c) Para el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 16u = 4 \\ \qquad y + 2z - 3u = 6 \\ -x - y + z + 9u = -2 \end{cases}$$

tenemos que rango(A) = 3, puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 3 + 2 = -4 \neq 0.$$

Esto implica que también rango(A^*) = 3, con lo que el sistema es compatible, pero indeterminado. Hay infinitas soluciones, que dependen de un parámetro.

1.9. Resolución de sistemas

Nos dedicaremos a continuación a resolver sistemas lineales, por supuesto sólo en el caso de que sean compatibles.

Decimos que un sistema es de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz del sistema es no nulo, es decir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

y $\det(A) \neq 0$, con $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$. La única solución de un sistema de Cramer viene dada por:

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

para $i = 1, \cdots, n$. Observemos que cada uno de estos determinantes se obtiene sustituyendo en el determinante de la matriz del sistema A la columna $i-$ésima por el término independiente.

Ejemplo 15. (a) Consideremos un sistema que ya analizamos en un ejemplo anterior:

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = -13 \\ 3x - y + 2z = -3 \\ -3x + 5y - z = 9, \end{cases}$$

para el que ya vimos que $\det(A) = 48 \neq 0$, así que se trata de un sistema de Cramer. La única solución viene dada por:

$$x = \frac{1}{48} \begin{vmatrix} -13 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \frac{48}{48} = 1,$$

$$y = \frac{1}{48} \begin{vmatrix} 1 & -13 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \frac{96}{48} = 2,$$

$$z = \frac{1}{48} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & -5 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{96}{48} = -2.$$

Así pues, la única solución es $(x, y, z) = (1, 2, -2)$.

(b) También hemos analizado anteriormente el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z-16u=4 \\ y+2z-3u=6 \\ -x-y+z+9u=-2 \end{array}\right.$$

que es compatible e indeterminado, con rango$(A)=3$. Deducimos que existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro. A la hora de resolverlo, tratamos una de las incógnitas como un parámetro y resolvemos en términos de las otras.

Por ejemplo, tomamos $u=t$, $t\in\mathbb{R}$ un parámetro. El sistema se convierte en

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=4+16t \\ y+2z=6+3t \\ -x-y+z=-2-9t \end{array}\right.$$

Puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0,$$

se trata de un sistema de Cramer. La solución viene dada por:

$$x=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4+16t & 2 & -3 \\ 6+3t & 1 & 2 \\ -2-9t & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1+3t,$$

$$y=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 4+16t & -3 \\ 0 & 6+3t & 2 \\ -1 & -2-9t & 1 \end{vmatrix}=4+5t,$$

$$z=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4+16t \\ 0 & 1 & 6+3t \\ -1 & -1 & -2-9t \end{vmatrix}=1-t.$$

Así, las infinitas soluciones vienen dadas por $(x,y,z,u)=(-1+3t,4+5t,1-t,t)$, con $t\in\mathbb{R}$ arbitrario.

Finalizamos este apartado viendo un método alternativo para resolver sistemas. Se trata del método de Gauss (o de eliminación gaussiana). Consiste en hacer operaciones por fila en la matriz ampliada hasta llegar a una matriz triangular superior. De esta forma, el sistema se transforma en uno equivalente pero más sencillo de resolver.

Ejemplo 16. Consideramos de nuevo el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y+4z=-13 \\ 3x-y+2z=-3 \\ -3x+5y-z=9, \end{array}\right.$$

cuya matriz ampliada es

$$A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & -13 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right).$$

Hacemos operaciones por filas para lograr una matriz triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -13 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -13 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & 11 & -30 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -13 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -24 \end{pmatrix}.$$

El sistema original es entonces equivalente a

$$\left\{ \begin{aligned} x - 3y + 4z &= -13 \\ 4y + z &= 6 \\ 12z &= -24, \end{aligned} \right.$$

que se resuelve "de abajo hacia arriba":

$$\begin{aligned} z &= -\frac{24}{12} = -2 \\ y &= \frac{6-z}{4} = 2 \\ x &= 3y - 4z - 13 = 1, \end{aligned}$$

obteniendo la solución $(x, y, z) = (1, 2, -2)$, que coincide con la hallada anteriormente por el método de Cramer.

1.10. Programación lineal

La programación lineal es una técnica matemática muy útil, que permite resolver problemas de optimización en los cuales todas las expresiones involucradas son lineales. En esta sección analizaremos cómo se aplica cuando se trabaja solamente con dos variables.

A modo de introducción a esta clase de problemas, consideremos el siguiente ejemplo:

> Una fábrica de muebles fabrica dos tipos de sillones, $S1$ y $S2$. La fábrica cuenta con una sección de carpintería y otra de tapicería. Hacer un sillón de tipo $S1$ requiere una hora de carpintería y dos de tapicería, mientras que uno de tipo $S2$ requiere tres horas de carpintería y una de tapicería. El personal de tapicería trabaja un total de 80 horas y el de carpintería 90 horas. Las ganancias por las ventas de los sillones son de 60 euros para los de tipo $S1$ y 40 euros para los de tipo $S2$. Se pide calcular cuántos sillones de cada tipo hay que hacer para maximizar las ganancias.

Denotemos por x e y la cantidad de sillones de los tipos $S1$ y $S2$, respectivamente, que se van a fabricar. Puesto que la ganancia es de 60 euros por cada sillón de tipo $S1$ y 40 euros por cada uno de tipo $S2$, la ganancia total será

$$G(x, y) = 60x + 40y.$$

Observemos que se trata de maximizar esta función, sujeta a ciertas restricciones sobre x e y. La primera restricción natural es $x, y \geq 0$, puesto que el número de sillones no puede ser negativo. Ahora veamos cuántas horas de carpintería son necesarias para construir ambos sillones. Puesto que los de tipo $S1$ necesitan una hora y los de tipo $S2$ tres horas, la cantidad total será $x + 3y$. Esta cantidad no puede superar las 90 horas, es decir, debe tenerse

$$x + 3y \leq 90.$$

De la misma forma, la cantidad de horas de tapicería necesarias para ambos sillones es $2x + y$, y por eso

$$2x + y \leq 80,$$

ya que no se deben superar las 80 horas de tapicería.

El problema anterior se puede resumir entonces en lo siguiente: maximizar la función $G(x, y) = 60x + 40y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 90 \\ 2x + y \leq 80. \end{cases}$$

El ejemplo anterior es un típico problema de programación lineal en dos variables. Estos problemas en general consisten en maximizar (o minimizar) una función lineal de dos variables

$$F(x, y) = Ax + By,$$

con $A, B \in \mathbb{R}$, bajo las m restricciones adicionales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_1 \\ \quad\vdots \\ a_mx + b_my \leq c_m, \end{cases} \tag{1}$$

siendo todos los coeficientes a_i, b_i, c_i, $i = 1, \ldots, m$ números reales. Destaquemos que los coeficientes a_i, b_i pueden tener signo arbitrario, con lo cual es posible cambiar los signos $\leq$ por $\geq$.

La primera observación importante es que las desigualdades (1) determinan una región en el plano, delimitada por segmentos de recta. En el contexto de la programación lineal, esta región se llama *región factible*. Veamos un ejemplo.

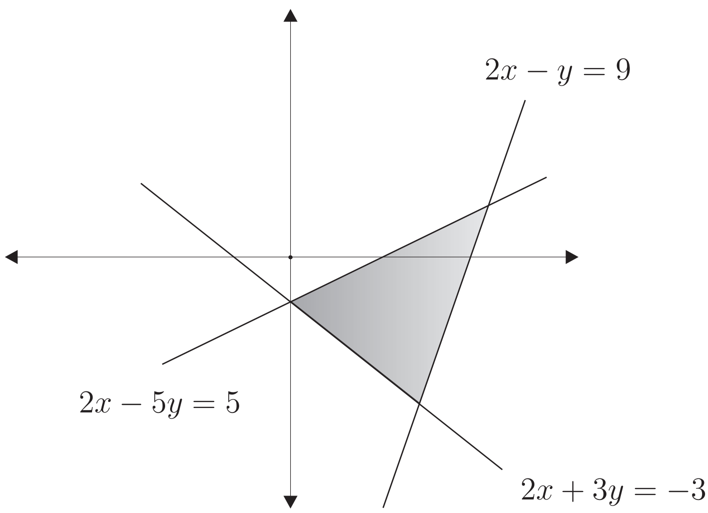
Ejemplo 17. Representar la región determinada por las desigualdades

$$\begin{cases} 2x+3y \geq -3 \\ 2x-y \leq 9 \\ 2x-5y \geq 5. \end{cases}$$

Representamos en primer lugar las tres rectas:

$$\begin{cases} 2x+3y = -3 \\ 2x-y = 9 \\ 2x-5y = 5. \end{cases}$$

A continuación, observamos que las desigualdades se pueden escribir como $y \geq \frac{-2x-3}{3}$, $y \geq 2x-9$, $y \leq \frac{2x-5}{5}$. Por tanto, hay que tomar la región que está por encima de las dos primeras rectas y por debajo de la tercera. Se trata de la región triangular representada en la figura.



Nuestro objetivo es maximizar o minimizar la función $F(x,y)$ sobre una región factible. Los puntos de una región factible se llaman *soluciones factibles*. De todos ellos, los que hacen óptima la función $F(x,y)$ (máxima o mínima) se llaman *soluciones óptimas*. Destaquemos que en general un problema de programación lineal puede tener una única solución óptima, ninguna o infinitas. Pero se da la siguiente propiedad fundamental:

> Si hay una única solución óptima, ésta se encuentra en un vértice de la región factible y si hay infinitas soluciones óptimas se encontrarán en uno de los lados que delimita la región factible.

Esta propiedad nos da un método para calcular la solución óptima: calculamos los vértices de la región factible y evaluamos la función $F(x,y)$ en cada uno de los puntos, tomando el valor óptimo.

Ejemplo 18. Maximizar la función $F(x,y) = 2000x + 5000y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -3 \\ 2x - y \leq 9 \\ 2x - 5y \geq 5. \end{cases}$$

La región factible es la misma que en el ejemplo anterior. Para calcular los vértices, hallamos los puntos de corte de cada par de rectas que delimitan la región. Esto se reduce a resolver tres sistemas de ecuaciones. El primero de ellos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

tiene como solución $x = 3$, $y = -3$. La solución del segundo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases}$$

es $x = 0$, $y = -1$ y la del tercero:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases}$$

viene dada por $x = 5$, $y = 1$. Por tanto, los tres puntos de corte son $(3, -3)$, $(0, -1)$ y $(5, 1)$. Evaluemos la función F en cada uno de los puntos:

$$\begin{aligned} F(3,-3) &= 2000 \cdot 3 + 5000 \cdot (-3) = -9000 \\ F(0,-1) &= 2000 \cdot 0 + 5000 \cdot (-1) = -5000 \\ F(5,1) &= 2000 \cdot 5 + 5000 \cdot 1 = 15000. \end{aligned}$$

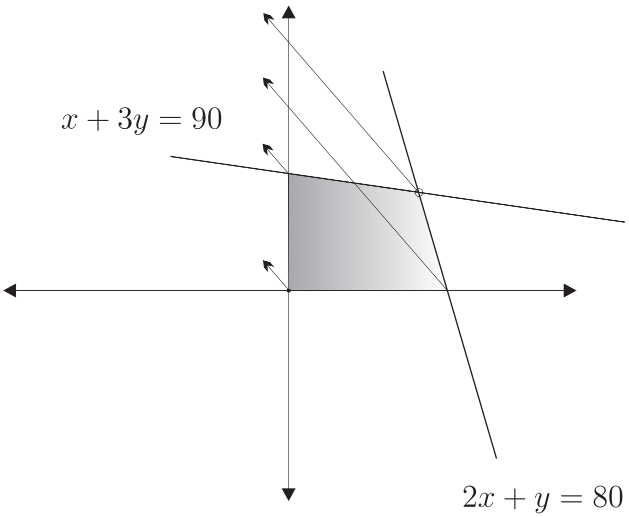
Puesto que el valor máximo se obtiene en el punto $(5, 1)$, obtenemos que éste es una solución óptima. Por tanto, el máximo de la función $F(x,y)$ con las restricciones adicionales se obtiene cuando $x = 5$, $y = 1$, y es igual a 15000.

Hay un método alternativo, de naturaleza gráfica, para resolver estos problemas. Consiste en lo siguiente: tomamos el vector director de la recta $Ax+By = 0$, dado por $(-B, A)$ (o cualquier vector proporcional a él). Por los vértices de la región factible trazamos rectas con este vector director y comprobamos cuál de ellas intersecta al eje OY con una coordenada más grande. En ese vértice se alcanzará el máximo de la función.

Ejemplo 19. Retomemos el ejemplo con el que abríamos la sección. Se trata de maximizar la función $G(x,y) = 60x + 40y$ en la región factible

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 90 \\ 2x + y \leq 80. \end{cases}$$

Tomemos el vector director de la recta $60x + 40y = 0$, que es $(-40, 60)$. Por comodidad, seleccionamos uno proporcional a él, como el $(-2, 3)$. Ahora trazamos rectas con vector director $(-2, 3)$ por los vértices de la región factible:



Vemos claramente que el máximo debe alcanzarse en la intersección de las rectas $x + 3y = 90$, $2x + y = 80$, es decir, en el punto $(30, 20)$. Como además $G(30, 20) = 2600$, vemos que hay que fabricar 30 sillones de tipo $S1$ y 20 sillones de tipo $S2$, siendo el beneficio total de 2600 euros.