Tema 4. CÁLCULO INTEGRAL.

Integración

1. Utilizar la Regla de Barrow para calcular el área encerrada bajo las curvas:

   (a) $f(x) = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$;

   (b) $f(x) = e^x$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$;

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, desde $x = 1$ hasta $x = e$.

2. En cada uno de los siguientes casos, hallar una primitiva F de f, que verifique la condición requerida:

   (a) $f(x) = x$, tal que $F(0) = 2$;

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, tal que $F(1) = 3$;

   (c) $f(x) = 5x^4$, tal que $F(1) = 2$;

   (d) $f(x) = e^{2x}$, tal que $F(0) = \dfrac{1}{2}$.

Integrales inmediatas

3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx.$ Solución: $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$

4. $\displaystyle\int \left(x + \sqrt{x}\right)^2 dx.$ Solución: $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{4}{5}\left(\sqrt{x}\right)^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + C.$

5. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2\right) dx.$ Solución: $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C.$

6. $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx.$ Solución: $4\left(\sqrt[4]{x}\right)^3 - \dfrac{1}{10}\left(\sqrt{x}\right)^5 + C$

7. $\displaystyle\int \left(6x^3 + \sqrt{2} + \frac{3}{x^3} + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$ Solución: $\dfrac{3}{2}x^4 + \sqrt{2}x - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6}{13}\left(\sqrt[6]{x}\right)^{13} + C.$

8. $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$

Integración por cambio de variable

9. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C.$

11. $\displaystyle\int e^{3x}\,dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{1}{3}\,e^{3x} + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{\ln^3 x}{3} + C.$

13. $\displaystyle\int \tan x \sec^2 x\,dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{1}{2}\tan^2 x + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{1}{2\cos^2 x} + C.$

Integración por partes

15. $\displaystyle\int \ln x \;dx.$ Solución: $x(\ln x - 1) + C$

16. $\displaystyle\int x\ln(x+3)\;dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{x^2-9}{2}\,\ln\mid x+3\mid - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} + C$

17. $\displaystyle\int x^2 \ln x\;dx.$ Solución:$\displaystyle\frac{x^3}{3}\left(lnx - \frac{1}{3}\right) + C$

18. $\displaystyle\int \left(x^2-5x+6\right) e^x\,dx.$ Solución: $e^x\left(x^2-7x+13\right) + C$

19. $\displaystyle\int x\sin(1-x)\,dx.$ Solución: $x\cos(1-x) + \sin(1-x) + C.$

20. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx.$ Solución: $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

21. $\displaystyle\int x\arctan x\,dx.$ Solución: $\displaystyle\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan(x) - \frac{1}{2}x + C$

22. $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx.$ Solución: $(x+1)\arctan\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} + C.$

Integración de funciones racionales

23. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^2-1)\,(x+2)}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{(3x+2)}{x(x+1)^3}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)^2}$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x-4)^2}\,dx$

Cálculo de áreas, volúmenes, longitudes y superficies de revolución

29. Hallar el área del recinto limitado por las curvas:

    (a) $y = x^2\,,\ x+y=2$;
    (b) $y = 2^x\,,\ y = 2\,,\ x = 0$;
    (c) $y = x^3\,,\ y = 2x\,,\ y = x$;
    (d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}\ ,\ y = \dfrac{x^2}{2}$.

30. Hallar el área del recinto limitado por las curvas:

    (a) $y = \sqrt{25-x^2}\ ,\ x = 0\ ,\ x = 5$;
    (b) $y = \sin x\ ,\ y = \cos x$, entre dos puntos de corte consecutivos;
    (c) $y = \sin x + \tan x\ ,\ x = 0\ ,\ x = \dfrac{\pi}{4}$.

31. Calcula el volumen del sólido generado por la rotación del área acotada por la siguientes curvas alrededor del eje X:

    (a) los ejes coordenados y las rectas $y = x+2\ ,\ x = 3$;
    (b) la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$;
    (c) la parábola $y = x^2-5x+6$ y el eje X;
    (d) $y = x^3\ ,\ y = x$ (en el primer cuadrante).

32. Calcular el volumen del sólido generado por la rotación del área acotada por las siguientes curvas alrededor del eje X:

    (a) un arco de sinusoide $y = \sin x$ y el eje X;
    (b) $y = e^{-2x}$ y las rectas $y = 0\ , x = 0\ x = 2$;

(c) $y = xe^x$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$;

(d) hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

33. Hallar el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de las siguientes curvas alrededor del eje X:

    (a) $x^2 + y^2 = a^2$ (Esfera);

    (b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (Elipsoide de revolución);

    (c) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ (Toro).

34. Una vasija semiesférica con un radio de 5 metros contiene un líquido que alcanza una profundidad de 4 metros. Calcular el volumen del líquido.

35. Calcular la longitud de las siguientes curvas en el intervalo indicado:

    (a) $2y = x^2$ en $[0, 1]$;

    (b) $y^2 = x^3$ en $[1, 4]$;

    (c) $y = \ln x$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$;

    (d) $y = \sqrt{2x - x^2}$ en $[1, 3/2]$.

36. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada al girar las siguientes curvas alrededor del eje X:

    (a) $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [1,4];

    (b) $y = e^x$ en el intervalo [1,e];

    (c) Un arco de la curva $y = \sin x$;

    (d) El círculo $x^2 + y^2 = 1$;

    (e) La elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.