Un Problema Logístico con blow-up sobre la frontera: Existencia, Unicidad y expansión asintótica *

Jorge García M., René Letelier A. y José Sabina de Lis

VI Simposio Internacional de Matemáticas
Punta Arenas, Chile, 12-15 de noviembre de 2002.

RESUMEN

Se obtienen resultados del tipo existencia, unicidad y expansión asintótica, cerca de la frontera, de las soluciones positivas de ciertos problemas no-lineales elípticos y parabólicos, cuya estructura es compatible con éstos comportamientos.

RESULTADOS

Consideremos un problema no-lineal cuyo modelo suficientemente representativo es el siguiente:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(x)u - a(x)u^p \quad \text{en } \Omega \\ \lim\limits_{d(x,\partial\Omega)\to 0} u(x) = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $p > 1$, $\lambda, a \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, para algún $0 < \alpha < 1$, $a > 0$ en Ω y $a = 0$ sobre $\partial\Omega$.

El Problema (1) surge en forma natural a partir del estudio de las soluciones positivas del problema logístico, ver [7]:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - a(x)u^p \quad \text{en } \Omega' \\ u(x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega', \end{cases} \tag{2}$$

donde Ω' es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, λ es un parámetro positivo, $a > 0$ en $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \Omega'$ y $a = 0$ en $\overline{\Omega'}\backslash\Omega$.

*Parcialmente financiado por FONDECYT $N^o 1000333$ (Chile) y MCYT, FEDER $N^o BFM 2001-3894$ (España).

El problema (2) corresponde al modelo logístico clásico para el estudio del comportamiento de una especie confinada a un habitat Ω' en presencia de un refugio $\overline{\Omega'}\backslash\Omega$. En este contexto, u representa la densidad de población de la especie, λ es un parámetro que mide el crecimiento intrínseco y $a(x)$ representa la capacidad de Ω' para soportar la especie. En particular, en la región donde $a > 0$, a actúa como un término de competición; donde $a < 0$, a actúa como un efecto de simbiosis; y, por último, donde $a = 0$, la especie sólo está afectada por su tasa de crecimiento y por su difusión. En consecuencia, en el problema (2), la condición $a = 0$ sobre la frontera de Ω surge como una restricción natural en el problema logístico, para modelar el comportamiento de una especie en presencia de un refugio, ver, por ejemplo, [7, 16].

Por otra parte, es bien conocido que el problema (2) puede tener soluciones positivas sólo cuando $\lambda_1(\Omega') < \lambda < \lambda_1(\Omega)$, donde λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet homogéneas. Además, si u_λ es una solución positiva de (2) en dicho rango de λ, ella es única. Se conoce también que la L^∞–norma de u_λ decae hacia cero cuando $\lambda \downarrow \lambda_1(\Omega')$ mientras que u_λ satisface $u_\lambda \to +\infty$ uniformemente sobre compactos de $\Omega'\backslash\Omega$ cuando $\lambda \uparrow \lambda_1(\Omega)$. Por último, $u_\lambda \to \underline{u}$ en $C^{2,\alpha}(\Omega)$ cuando $\lambda \uparrow \lambda_1(\Omega)$, para algún $0 < \alpha < 1$, donde $\underline{u}$ es la solución minimal del problema (1), cuando $\lambda(x)$ se reemplaza por $\lambda_1(\Omega)$, ver [7].

El estudio de problemas con blow-up sobre la frontera se remonta al año 1916, [3]. Aunque han habido muchas contribuciones importantes desde entonces, su mayor desarrollo se ha producido en la última década, ver, por ejemplo, [2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 15]. Relacionado con el problema (1), Marcus y Véron, [14], obtienen existencia y unicidad bajo la hipótesis $a(x) \geq a_0 > 0$, en dominios con menos regularidad que los nuestros.

Como dijimos, obtenemos existencia, unicidad y expansión asintótica a dos términos de la solución de (1). Nuestros resultados incluyen el caso $\;a = 0\;$ sobre la frontera. En concreto probamos el siguiente:

Teorema. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^k, $k \geq 4$, y λ, $a \in C^\alpha(\Omega)$ tal que $a > 0$ en Ω. Entonces el problema (1) admite una solución clásica minimal y otra maximal. Si además, $a = 0$ sobre $\partial\Omega$ y

$$a(x) = C_0 d^\gamma + o(d^\gamma),$$

cuando $d \to 0+$, con $\gamma > 0$ and $C_0 > 0$, entonces toda solución $u \in C^2(\Omega)$ de (1) satisface

$$\lim_{d\to 0+} \frac{u}{Ad^{-\alpha}} = 1,$$

donde $\alpha = (\gamma + 2)/(p - 1)$ y $A = (\alpha(\alpha + 1)/C_0)^{\frac{1}{p-1}}$. Como una consecuencia, *(1) admite una única solución positiva. Además, si*

$$a(x) = C_0 d^{\gamma}(1 + C_1 d + o(d)),$$

cuando $d \to 0+$, se obtiene una estimación más fina para la expansión asintótica de u. Esto es,

$$u(x) = Ad^{-\alpha}(1 + B(s)d + o(d)), \tag{E}$$

cuando $d \to 0+$, donde

$$B(s) = \frac{(n-1)H(s) - (\alpha+1)C_1}{\gamma + p + 3},$$

$H(s)$ es la curvatura media de $\partial\Omega$ en s, y para cada x cerca de $\partial\Omega$, $d(x) :=$ dist$(x, \partial\Omega)$ y $s = s(x)$ es la proyección de x sobre $\partial\Omega$.

El Teorema anterior admite varias extensiones. Entre ellas, a problemas con no-linealidades más generales en los términos de orden cero:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(x)u - a(x)(u^p + g(x,u)), \quad x \in \Omega \\ \lim\limits_{d(x,\partial\Omega)\to 0} u(x) = \infty \end{cases} \tag{3}$$

donde $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisface las siguientes condiciones de crecimiento en cero y en infinito:

$$\lim_{u\to 0} \frac{g(x,u)}{u} = 0 \qquad \lim_{u\to +\infty} \frac{g(x,u)}{u^p} = 0,$$

uniformemente en $x \in \overline{\Omega}$.

Así como también a los problemas parabólicos asociados:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda(x)u - a(x)u^p, \quad \text{en } Q = \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,t) = +\infty \quad \text{sobre} \quad \partial_p Q \end{cases} \tag{4}$$

donde $\partial_p Q$ denota la frontera parabólica, $(\partial\Omega \times \mathbb{R}^+) \cup (\Omega \times \{0\})$, generalizando los resultados de [1]. Finalmente, usando adecuadamente el resto en la expansión (E), es posible obtener la expansión asintótica de u con una mayor cantidad de términos de orden inferior.

BIBLIOGRAFÍA

[1] C. Bandle, G. Díaz and J.I. Díaz, *Solutions d'équations de réaction-diffusion non linéaires explosant au bord parabolique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 318 (1994), no. 5, 455–460.

[2] C. Bandle and M. Marcus, *On second order effects in the boundary behavior of large solutions of semilinear elliptic problems*, Differential and Integral Equations, Vol. 11 (1998), 23-34.

[3] L. Bieberbach, *und die automorphen Funktionen*, Math. Annln., 77 (1916), 173-212.

[4] M. Del Pino and R. Letelier, *The influence of domain geometry in boundary blow-up elliptic problems.* Nonlinear Analysis TMA 48 (2002), 897-904.

[5] G. Díaz and R. Letelier, *Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: Existence and uniqueness*, Nonlinear Analysis, TMA 20 (1993), 97-125.

[6] E.Dynkin and S. Kuznetsov, *Superdiffusions and removable singularities for quasilinear partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 49 (1996), 125-176.

[7] J. García-Melián, R. Gómez-Reñazco, J. López Gómez and J. Sabina de Lis, *Point-wise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs.* Arch. Rational Mech. Anal. 145 (1998), 261-289.

[8] J. García-Melián, R. Letelier and J. Sabina de Lis, *Uniqueness and Asymptotic behaviour for solutions of semilinear problems with boundary blow-up.* Proceedings of the American Math. Soc. Vol 129, Núm. 12 (2001), 3593-3602.

[9] A. Greco and G. Porru, *Asymptotic estimates and convexity of large solutions to semilinear elliptic equations*, Differential and Integral Equations, 10 (1997), 219-229.

[10] V. Kondrat'ev and V. Nikishkin, *Asymptotics, near the boundary, of a solution of a singular boundary-value problem for a semilinear elliptic equation.* Differential Equations 26, (1989), 345-348.

[11] A. V. Lair, *A necessary and sufficient condition for existence of large solutions to semilinear elliptic equations*, J. Math. anal. Appl., 240 (1999), 205-218.

[12] A. Lazer and P. McKenna, *On a problem of Bieberbach and Rademacher*, Nonlinear Analysis TMA, Vol 21 num. 5 (1993), 327-335.

[13] C. Loewner and L. Nirenberg, *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations*, Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers). Academic Press, New York, (1974), 345-348.

[14] M. Marcus and L. Verón, *Uniqueness and asymptotic behavior of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 14, num. 2 (1997), 237-274.

[15] A. A. Mohammed, G. Porcu and G. Porru, *Solutions to some non-linear O.D.E. with singular coefficients.* Nonlinear Analysis TMA 47 (2001), 513-524.

[16] D. Murray *Mathematical Biology*, Springer Verlag, 1993.

JORGE GARCÍA MELIÁN, JOSÉ SABINA DE LIS

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemática
Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España.

RENÉ LETELIER ALBORNOZ

Departamento de Matemática, Facultad de Cs. Fís. y Matemáticas
Universidad de Concepción, Concepción, Chile.