Difusión no lineal cuando un parámetro grande perturba la condición de contorno

JORGE GARCÍA MELIÁN
Depto. Análisis Matemático, U. de La Laguna (Tenerife)
jjgarmel@ull.es

JULIO D. ROSSI
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U. de Buenos Aires (Argentina)
Instituto de Matemáticas y Física Fundamental, CSIC (Madrid)
jrossi@dm.uba.ar

JOSÉ SABINA DE LIS
Depto. Análisis Matemático, U. de La Laguna (Tenerife)
josabina@ull.es

Palabras clave: Bifurcación, problema de Steklov, blow-up en la frontera, perturbación de dominios.
Clasificación para el Cedya 2005: Ecuaciones en derivadas parciales.

1. Introducción

En esta nota daremos una descripción resumida de los temas de existencia y unicidad –alternativamente multiplicidad– de soluciones positivas para el problema semilineal:

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^p & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

en donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado $C^{2,\alpha}$, $a(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $a(x) \geq 0$.

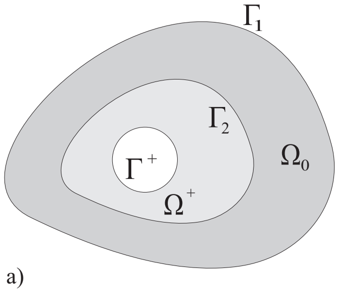
Las principales características del problema (1) son: a) la presencia del parámetro de bifurcación λ en la condición de contorno, b) la posibilidad de que $a \geq 0$ pueda anularse en todo un subdominio Ω_0 de Ω y c) los regímenes "degenerado" y "regular" del problema correspondientes a los rangos $0 < p < 1$ y $p > 1$, respectivamente, del exponente p. En particular, dedicaremos un interés especial al estudio de los perfiles asintóticos de las soluciones cuando el parámetro λ tiende a valores críticos λ_c donde ocurren fenómenos de bifurcación ($\lambda_c = 0, +\infty$ ó $\lambda_c = \sigma_1, \sigma_1^+ \in (0,\infty)$). En el caso degenerado, el estudio de regiones donde las soluciones u se anulan idénticamente ("núcleos muertos") será un aspecto adicional a tratar.

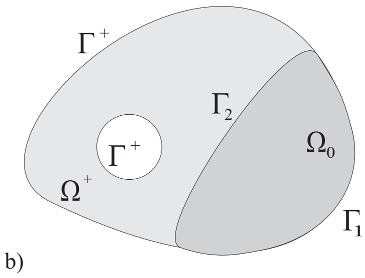
El problema (1) constituye un ejemplo más del grupo de modelos donde un mecanismo de "disipación" ("absorción") compite con otro de "producción" ("radiación"). El problema logístico bajo diferentes condiciones de contorno constituye el ejemplo paradigmático de este escenario (véanse [7], [2], [5], [1] para la discusión de fenómenos cercanos a los aquí tratados).

En el resto de la nota supondremos que el coeficiente $a(x)$ satisface la siguiente hipótesis:

H) $a \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ es no negativa y no trivial. Es además, o bien positiva en Ω o bien $a \equiv 0$ en un subdominio $\Omega_0 \subset \Omega$ de clase $C^{2,\alpha}$.

Para simplificar la exposición supondremos que la parte $\Gamma_2 := \Omega \cap \partial\Omega_0$ de la frontera de Ω_0 es cerrada, por tanto define una variedad cerrada $\Gamma_2 \subset \Omega$. La imagen a) de la siguiente figura refleja un ejemplo de esta configuración. Nuestros resultados se pueden no obstante reformular para cubrir configuraciones como la ilustrada en b) ([3]).





En relación con la hipótesis H) vamos a fijar las siguientes notaciones: $\Gamma_1 = \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_2$, $\Omega^+ = \{x \in \Omega : a(x) > 0\}$, $\Gamma^+ = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega$. Obsérvese que Ω^+ es $C^{2,\alpha}$ y que tanto Ω^+ como $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma^+$ presentan un número finito de componentes conexas. Por otra parte se tiene que $\partial\Omega^+ \cap \Omega = \Gamma_2$.

Observación 1. La condición de conexidad en Ω_0 puede relajarse sin que ello conlleve cambios significativos en los resultados.

2. Problemas de autovalores auxiliares

La descripción del conjunto de soluciones positivas para el problema (1) cuando $\Omega_0 \neq \emptyset$ requiere la introducción de los siguientes valores críticos para λ.

Definimos $\lambda = \sigma_1$ como el autovalor principal del problema de autovalores de tipo Steklov-mixto:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & x \in \Omega_0 \\ \phi = 0 & x \in \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} = \lambda\phi & x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

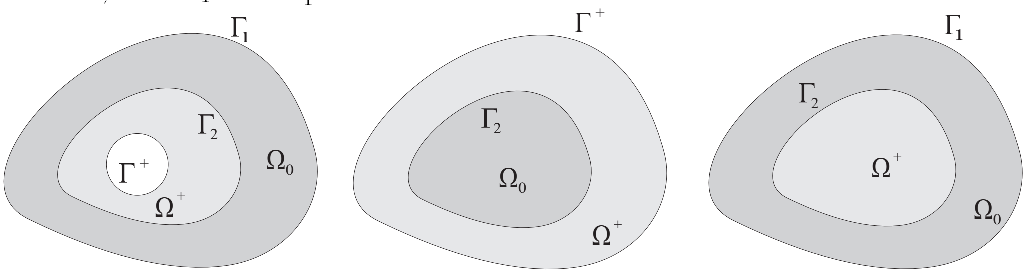
Pudiera muy bien ocurrir que $\Gamma_1 = \emptyset$. Ponemos en ese caso $\sigma_1 := \infty$.

Introducimos asimismo $\lambda = \sigma_1^+$, que es el correspondiente autovalor principal del problema:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & x \in \Omega^+ \\ \phi = 0 & x \in \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} = \lambda\phi & x \in \Gamma^+. \end{cases}$$

Fijamos asimismo $\sigma_1^+ := \infty$ si $\Gamma^+ = \emptyset$.

Remitimos a [3] para un estudio detallado de las propiedades de estos autovalores y de las de los autovalores principales de problemas relacionados (ver también [6]). Señalamos que σ_1^+ debe definirse adecuadamente en caso de que Ω^+ no sea conexo. En la primera de las siguientes configuraciones, tanto σ_1 como σ_1^+ son finitos. Uno de tales valores se hace infinito en las restantes.



3. El caso regular $p > 1$

Los resultados que sobre el régimen regular $p > 1$ del problema (P) se presentan a continuación, son parte del contenido del trabajo [3].

Teorema 1. *Supongamos que $a(x)$ satisface H) mientras $p > 1$. Entonces el problema (1) admite soluciones positivas $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ si y sólo si:*

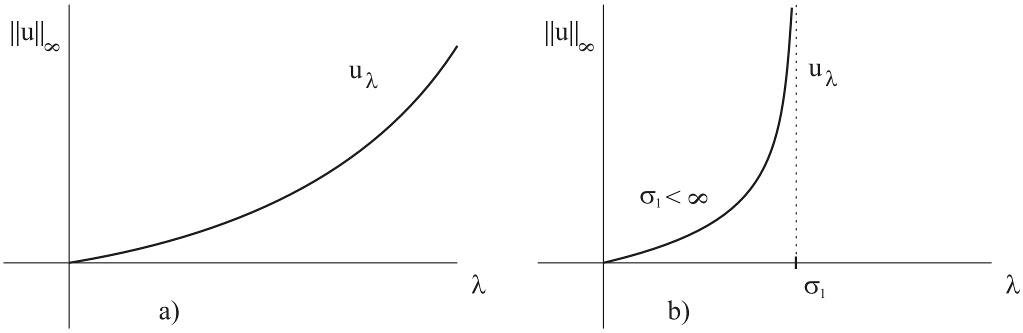
$$0 < \lambda < \sigma_1 \leq \infty,$$

siendo tal solución $u = u_\lambda(x)$ única. Además, la aplicación $\lambda \longmapsto u_\lambda$ es creciente y real analítica cuando se la considera tomando valores en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, siendo u_λ es globalmente atractiva (entre las soluciones positivas). Finalmente, $u_\lambda \to 0$ cuando $\lambda \to 0+$ mientras $|u_\lambda|_{\infty,\Omega} \to \infty$ si $\lambda \to \sigma_1$, $\sigma_1 \leq \infty$.

Observación 2. Aunque $a(x)$ sea positiva en Ω el Teorema 1 cubre la posibilidad de que $a(x)$ llegue a anularse en $\partial\Omega$.

Se ha establecido que si $\Omega_0 \neq \emptyset$ y $\sigma_1 < \infty$ las soluciones positivas desaparecen cuando λ cruza σ_1. Los siguientes resultados describen qué clase de singularidades explican esta interrupción. Incluso cuando $\sigma_1 = \infty$, la solución u_λ desarrolla un perfil finito en Ω al tender λ a infinito.

En el diagrama de bifurcación anexo a) corresponde al caso $a > 0$ en Ω o bien $\Omega_0 \neq \emptyset$ pero $\sigma_1 = +\infty$, b) al caso $\sigma_1 < +\infty$.



Teorema 2. *Supóngase que o bien $a(x) > 0$ para cada $x \in \Omega$ o bien $\Omega_0 \neq \emptyset$ pero $\sigma_1 = \infty$. Entonces la solución u_λ de* (1) *satisface $u_\lambda \to u$ en $C^{2,\alpha}(\Omega)$ cuando $\lambda \to \infty$ donde $u(x)$ constituye la solución mínima del problema de contorno singular:*

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^p & x \in \Omega \\ u = \infty & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Se tiene además la siguiente estimación de la tasa asintótica de crecimiento:

$$\varliminf_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\frac{2}{p-1}} \sup u_\lambda \geq |a|_\infty^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Teorema 3. *Bajo la condición $\sigma_1 < \infty$ y por tanto $\Gamma_1 = \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ se tiene que la solución u_λ de* (1) *satisface $u_\lambda \to \infty$ uniformemente en $\overline{\Omega}_0$ cuando $\lambda \to \sigma_1-$. Más aún, $u_\lambda \to u$ en $C^{2,\alpha}(\Omega^+)$ donde $u(x)$ es la solución mínima del problema singular:*

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^p & x \in \Omega^+ \\ u = \infty & x \in \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma_1 u & x \in \Gamma^+, \end{cases} \tag{3}$$

supuesto que $\Gamma^+ = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, o bien $u(x)$ es la solución mínima del problema:

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^p & x \in \Omega^+ \\ u = \infty & x \in \partial\Omega^+, \end{cases} \tag{4}$$

en caso contrario, es decir si $\Gamma^+ = \emptyset$.

Observación 3. Se pueden dar condiciones adecuadas sobre el coeficiente $a(x)$ que garantizan la unicidad de soluciones positivas para los problemas singulares (2), (3) y (4).

4. El caso degenerado $0 < p < 1$.

La materia que describimos a continuación es parte del contenido del trabajo [4]. En lo que sigue designaremos $\alpha_1 = \min\{p, \alpha\}$.

Teorema 4. *Admitamos que el coeficiente $a(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ satisface $a(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Entonces:*

i) El problema (1) *admite al menos una solución no negativa $u \in C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega})$, $u \neq 0$, para cada $\lambda > 0$ en tanto que tales soluciones no existen si $\lambda \leq 0$.*

ii) [Bifurcación en el infinito] *Para $0 < \lambda < \lambda_0$ existe una única solución positiva $u_\lambda \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. La aplicación $\lambda \longmapsto u_\lambda$ es real analítica en $(0, \lambda_0)$ con valores en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Más aún, es decreciente y satisface:*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{\frac{1}{1-p}}\ u_\lambda(x) = \left(\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_\Omega a\right)^{\frac{1}{1-p}}$$

donde el límite se considera en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

iii) [Estimación L^∞] *Existen constantes $\lambda_1 > 0$, $C > 0$ tales que toda solución no negativa u correspondiente a $\lambda \geq \lambda_1$ satisface:*

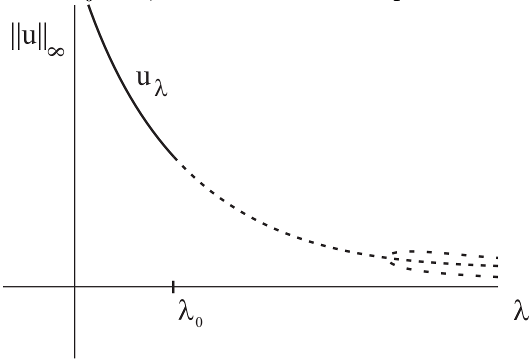
$$0 \leq u(x) \leq C\lambda^{-\frac{2}{1-p}}.$$

iv) [Formación de núcleos muertos] *Toda solución no negativa $u_\lambda \neq 0$ correspondiente a $\lambda \geq \lambda_2$, para cierta $\lambda_2 > 0$, desarrolla un núcleo muerto $\mathcal{O}_\lambda = \{u_\lambda(x) = 0\}$ de suerte que $\mathcal{O}_\lambda \to \Omega$ cuando $\lambda \to \infty$. Con más precisión:*

$$\left\{ x : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{K}{\lambda} \right\} \subset \mathcal{O}_\lambda,$$

para cierta constante $K > 0$.

En el diagrama de bifurcación adjunto, el trazo continuo representa la unicidad de soluciones



positivas.

Una característica del régimen degenerado es su tendencia a la multiplicidad de soluciones cuando λ es grande. Esto se refleja en el siguiente resultado.

Teorema 5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio $C^{2,\alpha}$ cuya frontera $\partial\Omega$ se descompone en k componentes conexas mientras $a(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ es positiva en Ω. Entonces, el problema* (1) *presenta al menos $2^k - 1$ soluciones no negativas y no triviales cuando λ es suficientemente grande.*

A la vista del teorema surge inmediatamente la cuestión más natural. A saber, si es precisamente la no conexidad de $\partial\Omega$ la causa de la multiplicidad de soluciones. La respuesta la encontramos en el siguiente resultado en donde Ω es una bola, por tanto $\partial\Omega$ es conexa.

Teorema 6. *Considérese el problema* (1) *en una bola B de R^n siendo el coeficiente $a(x)$ positivo y radial. Entonces, el problema* (1) *admite para cada $\lambda > 0$ una solución radial y no negativa $u \neq 0$. Dicha solución es única para $0 < \lambda < \lambda_0$. Más aún:*

i) Existe una única *solución radial no negativa $u_\lambda \neq 0$ para λ grande que satisface:*

$$\mathit{dist}\ (\mathcal{O}_\lambda, \partial B) \sim \beta\lambda^{-1}, \qquad u_\lambda(1) \sim A\beta^\beta\lambda^{-\beta},$$

cuando $\lambda \to +\infty$ siendo $\beta = 2/(1-p)$, $A = [\beta(\beta-1)]^{-1/(1-p)}$.

ii) Existe $\lambda_3 > 0$ tal que el problema (1) *admite una solución $u \neq 0$ no negativa y* no radial *para cada $\lambda \geq \lambda_3$.*

Observación 4. En el caso $\Omega_0 \neq \emptyset$ pero $\sigma_1 = \infty$ ($\Gamma_1 = \emptyset$) es posible deducir para el problema (1) las mismas conclusiones obtenidas en el Teorema 4. A saber:

i) Para $\lambda > 0$ el problema (1) admite al menos una solución no negativa $u \in C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$, no habiendo tales soluciones para $\lambda \leq 0$.

ii) Existe una única solución positiva $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para $0 < \lambda < \lambda_0$ que bifurca desde el infinito en $\lambda = 0$, con $u_\lambda(x) \sim \left(\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_\Omega a\right)^{\frac{1}{1-p}} \lambda^{-\frac{1}{1-p}}$ cuando $\lambda \to 0+$.

iii) Para λ grande las soluciones no negativas u admiten la estimación $0 \leq u(x) \leq C\lambda^{-\frac{2}{1-p}}$ donde la constante C no depende de u.

iv) También para λ grande todas las soluciones no negativas u desarrollan un núcleo muerto $\mathcal{O}_\lambda$ que cumple $\{x : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq d(\lambda)\} \subset \mathcal{O}_\lambda = \{u_\lambda(x) = 0\}$, $d(\lambda) \to 0$ as $\lambda \to \infty$.

Sin embargo, la situación es completamente diferente al régimen regular $p > 1$ cuando $\sigma_1 < \infty$ ($\Gamma_1 \neq \emptyset$). En el marco degenerado, el autovalor σ_1^+ juega un papel importante.

Teorema 7. *Supongamos que $\sigma_1 < \infty$. Entonces existe al menos una solución no negativa $u \in C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$, $\alpha_1 = \text{mín}\{p, \alpha\}$, con las mismas propiedades que las de las correspondientes soluciones no negativas descritas en el Teorema 4 siempre que $0 < \lambda < \sigma_1$. Lo que es más importante:*

i) En el caso $\sigma_1^+ = \infty$ no existen soluciones no negativas no triviales para ningún $\lambda \geq \sigma_1$.

ii) Supuesto que $\sigma_1^+ < \infty$ las soluciones no negativas y no triviales sólo pueden existir en el rango $\lambda > \sigma_1^+$. En particular, tales soluciones no pueden existir para λ cumpliendo:

$$\sigma_1 \leq \lambda \leq \sigma_1^+,$$

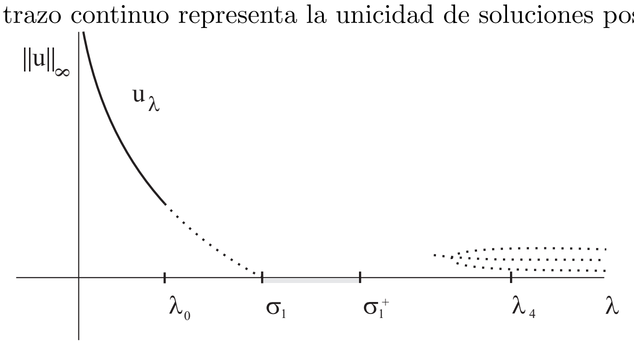
supuesto que $\sigma_1 \leq \sigma_1^+$ (véase el diagrama adjunto).

iii) Para $\sigma_1^+ < \infty$ el problema (1) admite al menos una solución no negativa y no trivial u para cada $\lambda \geq \lambda_4 > \sigma_1^+$. Tales soluciones satisfacen la estimación:

$$0 \leq u(x) \leq C\ \lambda^{-\frac{2}{1-p}},$$

y desarrollan un núcleo muerto que satisface $\mathcal{O}_\lambda \to \Omega$ cuando $\lambda \to \infty$ en la forma descrita en la Observación 4-iv).

En el diagrama el trazo continuo representa la unicidad de soluciones positivas.



Para concluir el panorama cualitativo del conjunto de soluciones no negativas del problema (1) en el caso degenerado, damos condiciones suficientes para que haya bifurcación desde $u = 0$ en $\lambda = \sigma_1$.

Teorema 8. *Admitamos que $\sigma_1 < \infty$ y que se da alguna de las siguientes condiciones: o bien $\sigma_1 \leq \sigma_1^+$ o bien $\sigma_1^+ < \sigma_1$ pero en cambio $u = 0$ es la única solución no negativa en $\lambda = \sigma_1$. Entonces:*

$$u_\lambda \to 0 \qquad \text{cuando} \ \ \lambda \to \sigma_1-,$$

en $C^{2,\alpha_1}(\overline{\Omega})$. Por otra parte, toda posible solución u desarrolla un núcleo muerto $\mathcal{O}_\lambda \subset \Omega^+$ tal que $\mathcal{O}_\lambda \to \Omega^+$ cuando $\lambda \to \sigma_1-$. Finalmente, toda solución no negativa u correspondiente a $\lambda \geq \sigma_1$ satisface $u \equiv 0$ en Ω_0.

Bibliografía

[1] Y. Du; Q. Huang, *Blow-up solutions for a class of semilinear elliptic and parabolic equations*, SIAM J. Math. Anal. **31** (1999), 1-18.

[2] J. M. Fraile; P. Koch-Medina; J. López-Gómez; S. Merino, *Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation*, J. Differ. Equations **127** (1996), 295-319.

[3] J. García-Melián, J. D. Rossi; J. Sabina de Lis, *A bifurcation problem governed by the boundary condition I*, aceptado para publicación en NoDEA Non Linear Differential Equations Appl., 2005.

[4] J. García-Melián, J. D. Rossi; J. Sabina de Lis, *A bifurcation problem governed by the boundary condition II*, enviado para publicación, 2005.

[5] J. García-Melián, R. Gómez-Reñasco, J. López-Gómez, J. Sabina de Lis, *Point-wise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs*, Arch. Rat. Mech. Anal. **145** (1998), 261-289.

[6] A. A. Lacey, J. R. Ockendon, J. Sabina, *Multidimensional reaction diffusion equations with nonlinear boundary value conditions*, SIAM J. Appl. Math. **58** (1998), 1622–1647.

[7] T. Ouyang, *On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$ on the compact manifolds*, Trans. Am. Math. Soc. **331** (1992), 503-527.