Blow-up en la frontera: sistemas elípticos de tipo competitivo.

J. García-Melián[1], R. Letelier-Albornoz[2] y J. Sabina de Lis[1]

Abril de 2003

Abstract

En este trabajo se analizan las versiones unidimensional y radial del sistema $\Delta u = v^p$, $\Delta v = u^q$, $x \in \Omega$, $p, q > 0$, bajo la condición de contorno singular $u_{|\partial\Omega} = +\infty$, $v_{|\partial\Omega} = +\infty$. Se establecen diversos resultados de existencia, unicidad, multiplicidad de soluciones y perfiles de explosión en la frontera.

Introducción

El objetivo de la comunicación es describir con el mayor detalle posible el conjunto de *todas* las soluciones positivas del problema de contorno singular:

$$\begin{cases} \Delta u = v^p & \text{en} \quad \Omega \\ \Delta v = u^q & \text{en} \quad \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = +\infty, \quad v_{|\partial\Omega} = +\infty \ , \end{cases} \tag{1}$$

donde $p, q > 0$, mientras Ω es un intervalo de $\mathbb{R}$ o una bola de $\mathbb{R}^N$. Debe resaltarse que en el caso de una sola ecuación, este tipo de condición de contorno singular tiene una larga tradición en la teoría de superficies de Riemann y geometría Riemanniana. Específicamente, los problemas $\Delta u = e^u$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u_{|\partial\Omega} = +\infty$ y $\Delta u = u^p$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u_{|\partial\Omega} = +\infty$ (cf. [1],[9],[10]). Véanse también [6, 7] donde se introducen otro tipo de aplicación y los primeros resultados generales, así como [3] para una panorámica de literatura reciente.

El estudio que aquí se presenta está motivado por nuestros trabajos [2], [3]. En [2] se descubrió que esta clase de problemas bajo una condición de contorno infinita en la frontera se presenta en el modelo más sencillo de la dinámica de poblaciones, es decir, la ecuación logística:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda u - a(x)u^p, & x \in Q, \ t > 0, \\ u_{|\partial Q} = 0, \end{cases} \tag{L}$$

$p > 1$, $Q \subset \mathbb{R}^N$ regular y acotado, $a \in C^\alpha(Q)$ no negativa. En presencia de un "refugio" para la especie u el soporte de a es $\overline{\Omega}$, $\Omega = \{x \in \Omega : a(x) > 0\}$ un dominio regular, mientras el refugio $Q_0 := Q \setminus \overline{\Omega} \subset Q$ es también un dominio regular. Para valores de la tasa de natalidad $\lambda \leq \lambda_1(Q)$ (λ_1 el primer autovalor Dirichlet en el dominio correspondiente) la especie se extingue, $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$; estabilizándose cuando $t \to \infty$ hacia la solución estacionaria positiva de (L) si $\lambda_1(Q) < \lambda < \lambda_1(Q_0)$. El régimen "singular" del problema ocurre cuando $\lambda \geq \lambda_1(Q_0)$. En este caso $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = +\infty$ en Q_0 mientras $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x)$ en $C^2(\Omega)$, donde v es la solución minimal del problema de contorno singular:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - a(x)u^p & x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = +\infty. \end{cases} \tag{LS}$$

En [3] se cerró una cuestión no resuelta en [2], a saber, la *unicidad* de soluciones positivas para el problema (LS). Como parte de la estrategia de la prueba, y bajo condiciones de comportamiento potencial de a cerca de la frontera de su soporte Ω, $a \sim Cd^\gamma$, $d \to 0+$, $d(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, se determinó el perfil asintótico exacto de explosión de u cerca de la frontera, en la forma: $u \sim A_0 d^{-\alpha}(1 + B_1 d + o(d))$ cuando $d \to 0+$, obteniéndose los valores de los coeficientes A_0, B_1 y del exponente α.

En el presente trabajo nos ocupamos de explicar cómo se extienden estos resultados al caso de sistemas, concentrándonos en las versiones unidimensional y radial de (1). Las secciones 2 y 3 se dedican a las soluciones simétricas y no simétricas, respectivamente, del problema unidimensional:

$$\begin{cases} u'' = v^p & -L < x < L, \\ u(\pm L) = +\infty, \end{cases} \qquad \begin{cases} v'' = u^q & -L < x < L, \\ v(\pm L) = +\infty \ . \end{cases} \tag{P}$$

El hecho más sobresaliente es la presencia de infinitas soluciones positivas, en contraste con el caso escalar. En el problema (P) se efectúa además una descripción minuciosa de la familia de tales soluciones determinándose el perfil de explosión en la frontera. La sección 4 se ocupa del problema radial. En todos los casos $pq > 1$ resulta ser una condición *necesaria y suficiente* para la existencia de soluciones. Demostraciones de todos los resultados aparecerán en [4].

Finalmente, debe destacarse que la fenomenología descrita se reproduce también en clases más generales de sistemas. A saber:

$$\begin{cases} \Delta u = f(v) & \text{en } \ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v = g(u) & \text{en } \ \Omega \\ v_{|\partial\Omega} = +\infty \end{cases}$$

donde f y g son funciones crecientes (sistemas competitivos, cf. [5]), de comportamiento adecuado en el infinito. En el caso especial $f(v) = e^v$, $g(u) = e^u$, los resultados son enteramente similares a los que se detallan a continuación.

Soluciones simétricas

Analizamos ahora la existencia y estructura del conjunto de soluciones positivas y simétricas del problema (P). Es decir, $u, v \in C^2[0, L)$ tales que:

$$\begin{cases} u'' = v^p & 0 < x < L \\ u'(0) = 0, \ u(L) = +\infty, \end{cases} \qquad \begin{cases} v'' = u^q & 0 < x < L \\ v'(0) = 0, \ v(L) = +\infty \ . \end{cases} \tag{2}$$

Debe observarse que las soluciones positivas (u, v) de (P) son estrictamente convexas, por tanto cada componente alcanza el ínfimo en un solo punto: $u_0 := \inf_{(-L,L)} u(x) =$

$u(x_{\min})$, $v_0 := \inf_{(-L,L)} v(x) = v(y_{\min})$. Típicamente $x_{\min} \neq y_{\min}$. En el caso $(u(x), v(x))$ simétrica se tiene $x_{\min} = y_{\min} = 0$. Además toda solución simétrica quedará unívocamente determinada por su ínfimo (u_0, v_0) a través del problema:

$$\begin{cases} u'' = v^p \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v'' = u^q \\ v(0) = v_0, \ v'(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

En el siguiente resultado se describen las soluciones simétricas de (P).

Teorema 1 *El problema (P) admite soluciones simétricas si y sólo si $pq > 1$. Además:*

i) [Cambio de escala] *Si $(u(x), v(x))$ es una solución de (P) en $(-L, L)$ entonces, para $\lambda > 0$, $(u_\lambda(x), v_\lambda(x)) = (\lambda u(\lambda^\theta x), \lambda^{(q+1)/(p+1)} v(\lambda^\theta x))$, $\theta = (pq-1)/(2(p+1))$, define una solución de (P) en el intervalo $(-\lambda^{-\theta} L, \lambda^{-\theta} L)$.*

ii) [Unicidad de soluciones] *El problema (P) admite una única solución simétrica y positiva en $(-L, L) \setminus \{0\}$, $(u, v) = (U_1(x), V_1(x))$ (respectivamente, $(u, v) = (U_2(x), V_2(x))$) tal que $\inf_{(-L,L)} u = U_1(0) = 0$ (respectivamente, $\inf_{(-L,L)} v = V_2(0) = 0$).*

iii) [Multiplicidad de soluciones] *Para cada $L > 0$ el conjunto de* todas *las soluciones positivas y simétricas de (P) en $(-L, L)$ constituye un arco continuo que conecta la solución (u, v) con $\inf_{(-L,L)} u = 0$ con la solución (u, v) con $\inf_{(-L,L)} v = 0$. Más precisamente, existe un arco continuo $(g_1, g_2) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2_+$, $g_1(t), g_2(t)$* no crecientes, *$(g_1, g_2)_{|t=0} = (U_1(0), V_1(0))$, $(g_1, g_2)_{|t=1} = (U_2(0), V_2(0))$, de forma que $\{(g_1(t), g_2(t)) : 0 \leq t \leq 1\}$ constituye el conjunto de los mínimos (u_0, v_0) de todas las posibles soluciones simétricas de (P).*

iv) [Perfiles de explosión] *Si $(u(x), v(x))$ es una solución positiva arbitraria de (P) entonces se tienen las siguientes estimaciones asintóticas exactas de las tasas de divergencia de u y v cuando $x \to L$:*

$$u(x) \sim A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} (L - x)^{-\alpha/(1-\alpha)} \qquad x \to L-, \tag{4}$$

$$v(x) \sim \left(\frac{B^\gamma}{C^\beta} \right)^{1/(\gamma-\beta)} \left(\frac{\beta}{\gamma - \beta} \right)^{\beta/(\gamma-\beta)} (L - x)^{-\beta/(\gamma-\beta)} \qquad x \to L-, \tag{5}$$

en donde:

$$\alpha = \frac{2(p+1)}{pq + 2p + 1} \quad \beta = \frac{2(q+1)}{pq + 2p + 1} \quad \gamma = \frac{pq + 2q + 1}{pq + 2p + 1},$$

mientras (A, B, C) designa la única solución positiva del sistema:

$$\alpha A B^p = 1 \qquad \beta B^{p+1} = C \qquad \gamma B^p C = A^q.$$

Observaciones 1. Nótese que en (4) y (5) se tiene que: $\alpha/(1-\alpha) = 2(p+1)/(pq-1)$ y $\beta/(\gamma - \beta) = 2(q+1)/(pq-1)$. Por tanto los exponentes de $(L - x)$ son negativos sólo cuando $pq > 1$.

Soluciones no simétricas

La presente sección se ocupa de estudiar la existencia de soluciones asimétricas de (P). Debe observarse que si $(u(x), v(x))$ es una solución positiva de (P) y $x_{\min}$ (respectivamente, $y_{\min}$) es el punto de $(-L, L)$ donde $u(x)$ (respectivamente, $v(x)$) alcanza el mínimimo, entonces una condición necesaria y suficiente para la simetría de (u, v) es que $x_{\min} = y_{\min} = 0$.

Nuestros próximos resultados establecen por una parte que toda solución simétrica genera, por continuidad, *dos* familias maximales distintas de soluciones asimétricas las cuales se generan perturbando bien $u'(0)$ o bien $v'(0)$ hasta valores no "continuables" (Teoremas 2 y 3 siguientes). Se prueba por otra parte que una solución asimétrica arbitraria $(u(x), v(x))$ procede necesariamente de una solución simétrica de (P) mediante la acción combinada de dichos procesos de continuación (Teorema 4).

Analizamos ahora con detalle las propiedades de continuidad del problema (3) con respecto a las derivadas en el origen.

Teorema 2 *Sea $(u(x), v(x))$ la solución simétrica de (P) correspondiente a un mínimo $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$, $u_0 > 0$. Existen entonces $\sigma_1^* = \sigma_1^*(u_0, v_0) > 0$ y funciones continuas $\omega^-(\sigma), \omega^+(\sigma)$, $\omega^\mp : [-\sigma_1^*, \sigma_1^*] \to \mathbb{R}_+$, ω^- no decreciente, ω^+ no creciente, $\omega^-(-\sigma) = \omega^+(\sigma)$, $\omega^+(-\sigma) = \omega^-(\sigma)$, de suerte que se cumplen los hechos siguientes:*

a) [Existencia de soluciones positivas] *La solución (u, v) del problema:*

$$\begin{cases} u'' = |v|^p \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = \sigma, \end{cases} \qquad \begin{cases} v'' = |u|^q \\ v(0) = v_0, \\ v'(0) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

es positiva para $x \neq 0$ si y sólo si *$|\sigma| \leq \sigma_1^*$, siendo $(-\omega^-(s), \omega^+(\sigma))$ su dominio de existencia maximal. σ_1^* es además una función continua de (u_0, v_0).*

b) [Positividad] *Si $(u(x,\sigma), v(x,\sigma))$ es la solución de (6) correspondiente a $|\sigma| \leq \sigma_1^*$; $x_{\min}(\sigma)$ es el punto de mínimo de $u(\cdot,\sigma)$ mientras $h(\sigma) := u(x_{\min}(\sigma), \sigma)$ resulta que $x_{\min}$ y h son funciones C^1 de σ, $x_{\min}(-\sigma) = -x_{\min}(\sigma)$, $h(-\sigma) = h(\sigma)$, siendo $x_{\min}$ y h decrecientes en $[0, \sigma_1^*]$. Más aún, $h(\pm\sigma_1^*) = 0$, es decir $\inf_{(-L,L)} u(\cdot, \pm\sigma_1^*) = 0$. Por otra parte, se tiene que $\inf_{(-L,L)} v(\cdot, \sigma) = v_0$ para $|\sigma| \leq \sigma_1^*$.*

c) [Simetría] *Para $-\omega^-(-\sigma) < x < \omega^+(-\sigma)$ se tiene que $(u(x, -\sigma), v(x, -\sigma)) = (u(-x, \sigma), v(-x, \sigma))$.*

d) [Explosión en la frontera y perfiles asintóticos] *Para cada $|\sigma| \leq \sigma_1^*$ se tiene que $\lim_{x \to \mp\omega^\mp(\pm)} u(x, \sigma) = +\infty$, $\lim_{x \to \mp\omega^\mp(\pm)} v(x, \sigma) = +\infty$. Más aún, los perfiles asintóticos de explosión coinciden con los de la solución simétrica (4), (5). Es decir:*

$$u(x, \sigma) \sim A^{\xi/\alpha}\, \xi^\xi\; d(x)^{-\xi}\,, \qquad v(x, \sigma) \sim (B^\gamma / C^\beta)^{\eta/\beta}\, \eta^\eta\; d(x)^{-\eta} \qquad d(x) \to 0+,$$

donde α, β, γ y A, B, C son los introducidos en el Teorema 1, $\xi = \alpha/(1-\alpha)$, $\eta = \beta/(\gamma - \beta)$, mientras $d(x) = \min\{\omega^+ - x, x + \omega^-\}$ representa la distancia de un $x \in (-\omega^-, \omega^+)$ a la frontera de dicho intervalo.

Observaciones 2

1). Las soluciones $(u(x,\sigma),v(x,\sigma))$ obtenidas en el Teorema 2 a partir de la solución simétrica $(u(x),v(x))$ son necesariamente asimétricas en el intervalo $(-\omega^-,\omega^+)$ para $0<|\sigma|\le\sigma_1^*$. En efecto, nótese que $x_{\min}\ne y_{\min}$ pues $y_{\min}=0$ mientras $x_{\min}(\sigma)\ne 0$ para $\sigma\ne 0$.

2). Una versión complementaria del Teorema 2 se obtiene inmediatamente si en el problema:

$$\left\{\begin{array}{l} u''=|v|^p \\ u(0)=u_0, \\ u'(0)=\sigma_1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} v''=|u|^q \\ v(0)=v_0, \\ v'(0)=\sigma_2, \end{array}\right. \tag{7}$$

donde $u_0\ge 0$, $v_0>0$, se fija $\sigma_1=0$ y se considera $\sigma_2=\sigma$ como parámetro de continuación, deduciéndose la existencia de una familia uniparamétrica de soluciones asimétricas de (P), $(u(x,0,\sigma),v(x,0,\sigma))$, definidas en el correspondiente intervalo maximal $(-\omega^-(0,\sigma),\omega^+(0,\sigma))$, siendo éstas positivas para $|\sigma|$ no mayor que cierto $\sigma_2^*=\sigma_2^*(u_0,v_0)<+\infty$, en donde se designa por $(u(x,\sigma_1,\sigma_2),v(x,\sigma_1,\sigma_2))$ a la solución maximal, positiva o no, de (7), definida en su dominio $(-\omega^-(\sigma_1,\sigma_2),\omega^+(\sigma_1,\sigma_2))$. Resulta interesante observar que dicha solución maximal, cualquiera que sea su signo, diverge siempre a $+\infty$ en los extremos $\omega^\pm(\sigma_1,\sigma_2)$ del intervalo, siendo éstos además finitos $|\omega^\pm(\sigma_1,s_2)|<+\infty$, a condición de que las derivadas σ_1,σ_2 satisfagan la relación: $\sigma_1\sigma_2\ne u_0^{q+1}/(q+1)+v_0^{p+1}/(p+1)$.

3). Profundizando en las ideas precedentes y para referencia inmediata, consideremos soluciones $(u_i(x),v_i(x))=(u(x,\sigma_1^{(i)},\sigma_2^{(i)}),v(x,\sigma_1^{(i)},\sigma_2^{(i)}))$, $i=1,2$, de (7) con datos $(u,v,u',v')_{|t=0}=(u_0,v_0,\sigma_1^{(i)},\sigma_2^{(i)})$, satisfaciendo $|\sigma_1^{(i)}\sigma_2^{(i)}|<u_0^{q+1}/(q+1)+v_0^{p+1}/(p+1)$, $i=1,2$. Entonces $(u_1(x),v_1(x))$ puede deformarse continuamente hasta $(u_2(x),v_2(x))$ mediante la familia $(u(x,\sigma_1,\sigma_2),v(x,\sigma_1,\sigma_2))$ de soluciones de (7), donde (σ_1,σ_2) varía en un arco continuo, contenido en la región $\{|\sigma_1\sigma_2|<u_0^{q+1}/(q+1)+v_0^{p+1}/(p+1)\}$ y constituido por la unión de dos segmentos rectilíneos en los que alternativamente σ_1 o σ_2 permanecen constantes. En este caso, todos los miembros $(u(x,\sigma_1,\sigma_2),v(x,\sigma_1,\sigma_2))$ de la perturbación definen soluciones positivas de (P) en los correspondientes intervalos finitos $(-\omega^-(\sigma_1,\sigma_2),\omega^+(\sigma_1,\sigma_2))$.

El que sigue es un resultado de existencia de soluciones asimétricas construidas por deformación de una simétrica dada.

Teorema 3 *Una condición necesaria y suficiente para que (P) admita soluciones positivas es que $pq>1$. Si, por otra parte, $(u(x),v(x))$ es cualquiera de sus soluciones simétricas en el intervalo $(-L,L)$ se satisface que:*

a) Si $u_0=\inf_{(-L,L)}u>0$ existe una familia continua de soluciones de (P) definidas en $(-L,L)$, $\{(\hat u(x,\sigma),\hat v(x,\sigma))\}_{|\sigma|\le\sigma_1^*}$, $(\hat u(x,\sigma),\hat v(x,\sigma))_{|\sigma=0}=(u(x),v(x))$, satisfaciendo: i) $\inf_{(-L,L)}\hat u(\cdot,\sigma)>0$ para $|\sigma|<\sigma_1^*$ anulándose dicho ínfimo en los valores $\sigma=\pm\sigma_1^*$, ii) $\hat v_x'(0,\sigma)\times\operatorname{signo}(\sigma)<0$ para $\sigma\ne 0$. Consecuentemente, las soluciones $(\hat u(x,\sigma),\hat v(x,\sigma))$ son no simétricas si $0<|\sigma|\le\sigma_1^*$.

b) Si alternativamente $v_0=\inf_{(-L,L)}v>0$ entonces existe una familia continua de soluciones de (P), $\{(\tilde u(x,\sigma),\tilde v(x,\sigma))\}_{|\sigma|\le\sigma_2^*}$, que pasa por la solución simétrica

$(u(x),v(x))$ en $\sigma = 0$ de suerte que $\inf_{(-L,L)} \tilde{v}(\cdot,\sigma) > 0$ para $\sigma \neq \pm\sigma_2^*$ con $\inf_{(-L,L)} \tilde{v}(\cdot,\pm\sigma_2^*) = 0$ mientras $\tilde{u}'_x(0,\sigma) \times \operatorname{signo}(\sigma) < 0$ para $\sigma \neq 0$, y de nuevo todos los miembros de la familia definen para $\sigma \neq 0$ soluciones no simétricas de (P) en el intervalo $(-L,L)$.

Observaciones 3. La idea de la prueba, por ejemplo en el caso *a)*, es combinar la perturbación con respecto a $u'(0)$ del Teorema 2 con la propiedad de cambio de escala del Teorema 1. Específicamente, se toman:

$$\bar{x}(\sigma) := \frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-), \quad l(\sigma) := \frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-), \quad \lambda(\sigma) := \left(\frac{l(\sigma)}{L}\right)^{1/\theta},$$

siendo $\theta = pq - 1/(2(p+1))$. La familia de soluciones $(\hat{u},\hat{v})$ se construye entonces de la forma siguiente:

$$(\hat{u}(x),\hat{v}(x)) = (\lambda u(\lambda^\theta x + \bar{x},\sigma), \lambda^{(q+1)/(p+1)} v(\lambda^\theta x + \bar{x},\sigma)),$$

en donde (cf. Teorema 2) $|\sigma| \leq \sigma_1^*$. Obsérvese que al ser $\omega^+ \leq L \leq \omega^-$ resulta que $\bar{x}(\sigma) \leq 0$ si $\sigma > 0$ mientras $\bar{x}(\sigma) \geq 0$ para $\sigma < 0$.

El siguiente resultado, esencialmente un recíproco del Teorema 3, asegura que toda solución de (P) procede, tras dos iteraciones del método de continuación del Teorema 2 (cf. Observaciones 2), de una solución simétrica de dicho problema.

Teorema 4 *Sea $(u(x),v(x))$ una solución positiva arbitraria del problema (P) en el intervalo $(-L,L)$. Existe entonces una familia continua de soluciones positivas de (P) en el intervalo $(-L,L)$, $\{(\tilde{u}(x,\sigma),\tilde{v}(x,\sigma))\}_{0\leq\sigma\leq1}$ tales que $(\tilde{u},\tilde{v})_{|\sigma=0} = (u,v)$ mientras que $(\tilde{u},\tilde{v})_{|\sigma=1} = (u^*,v^*)$ constituye la única solución simétrica del problema (P) con ínfimo en el punto $(u_0,v_0) = (u(0),v(0))$.*

Observaciones 4. La transformación que lleva $(u(x),v(x))$ a $(u^*(x),v^*(x))$, asociada a los valores $(\sigma_1^{(1)},\sigma_2^{(1)}) = (u'(0),v'(0))$ y $(\sigma_1^{(2)},\sigma_2^{(2)}) = (0,0)$ en la Observación 2.3, no es de ninguna manera única. Se puede transformar primero $u'(0) \to 0$ manteniendo $v'(0)$ constante para reducir después $v'(0) \to 0$ o alternativamente $v'(0) \to 0$ con $u'(0)$ constante, pasando en segundo lugar de $u'(0)$ a 0. Más aún, existen todavía infinitas maneras de efectuar $(u'(0),v'(0)) \to (0,0)$ con soluciones positivas de (P) asociadas $(u(x,\sigma_1,\sigma_2),v(x,\sigma_1,\sigma_2))$ en cada punto (σ_1,σ_2) del trayecto.

El problema radial

Las soluciones radiales $u = u(r)$, $v = v(r)$, $r = |x|$, del problema (1) en la bola N-dimensional $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ satisfacen la siguiente variante no autónoma del problema (P):

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{N-1}{r}u_r = v^p & 0 < r < R \\ v_{rr} + \frac{N-1}{r}v_r = u^q & 0 < r < R \\ u'(0) = 0, \quad u(R) = +\infty \\ v'(0) = 0, \quad v(R) = +\infty. \end{cases} \tag{PR}$$

Como en el caso unidimensional las soluciones $(u(r), v(r))$ alcanzan el ínfimo $(u_0, v_0) = (\inf_{[0,R)} u, \inf_{[0,R)} v)$ en un único punto: $r = 0$. Tales soluciones pueden, por tanto, reconstruirse a partir de dicho ínfimo mediante el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (r^{N-1}u')' = r^{N-1}v^p & 0 < r < R, \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (r^{N-1}v')' = r^{N-1}u^q & 0 < r < R, \\ v(0) = v_0, \ v'(0) = 0. \end{cases}$$

Nuestras conclusiones sobre la resolubilidad del problema (1) con simetría radial se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 5 *El problema (PR) admite soluciones positivas si y sólo si* $pq > 1$. *Se satisfacen además las siguientes propiedades:*

i) [Cambio de escala] *Si* $(u(r), v(r))$ *es una solución radial positiva de (1) en* B_R *con ínfimo* (u_0, v_0) *entonces para cada* $\lambda > 0$, $(u_\lambda, v_\lambda) = (\lambda u(\lambda^\theta r), \lambda^{\frac{q+1}{p+1}} v(\lambda^\theta r))$, $\theta = pq - 1/(2(p+1))$ *define una solución radial de (1) en la bola* B_{R_λ}, $R_\lambda = \lambda^{-\theta} R$ *cuyo ínfimo es* $(u_{0\lambda}, v_{0\lambda}) = (\lambda u_0, \lambda^{(q+1)/(p+1)} v_0)$.

ii) [Unicidad de soluciones] *El problema (1) admite una única solución radial* $(u, v) = (U_1(r), V_1(r))$ *(respectivamente,* $(u, v) = (U_2(r), V_2(r))$*) positiva en* $B_R \setminus \{(0, 0)\}$ *con la propiedad* $\inf_{[0,R)} u = 0$ *(respectivamente,* $\inf_{[0,R)} v = 0$*). Se satisface además* $V_1(0) = \inf_{[0,R)} V_1 > 0$ *(*$U_2(0) = \inf_{[0,R)} U_2 > 0$*).*

iii) [Multiplicidad de soluciones] *El problema (1) admite en la bola* B_R *una infinidad de soluciones radiales de forma que el conjunto de ínfimos* $\{(u_0, v_0) : u_0 = \inf_{[0,R)} u \ , \ v_0 = \inf_{[0,R)} v \ , (u, v)$ solución de (PR)$\}$ *se distribuye de forma no creciente con respecto a* u_0 *y* v_0 *y está contenido en el rectángulo* $[0, U_2(0)] \times [0, V_1(0)]$.

Observaciones 5. 1). Nótese que a diferencia del caso unidimensional, no se afirma en *iii)* que el conjunto de ínfimos $\{(u_0, v_0)\}$ de soluciones de (PR) constituye un arco *continuo*, aunque hay bastantes evidencias de que esto es así. Resulta asimismo formalmente claro que las tasas de explosión de las soluciones radiales en la frontera ∂B_R coinciden con las obtenidas en el caso unidimensional (4), (5). Curiosamente, es preciso aclarar la segunda cuestión para dar una respuesta afirmativa a la primera.
2). El trabajo reciente [8] considera el problema, substancialmente diferente, de las soluciones positivas de (PR) que explotan cuando $R \to +\infty$.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado conjuntamente con cargo al proyecto # BFM2001-3894 del Ministerio de Ciencia y Tecnología y los fondos FEDER y al proyecto FONDECYT # 1000333 del Gobierno de Chile.

Referencias

[1] L. Bieberbach, "$\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen", *Math. Ann.*, **77** (1916), 173-212.

[2] J. García-Melián, R. Gómez-Reñasco, J. López-Gómez, J. Sabina de Lis, "Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs", *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, **145**, 3, (1998), 261-289.

[3] J. García-Melián, R. Letelier-Albornoz, J. Sabina de Lis, "Uniqueness and asymptotic estimates for solutions of semilinear problems with boundary blow-up", *Proceedings of the American Mathematical Society*, **129**, 12, (2001), 3593-3602.

[4] J. García-Melián, R. Letelier-Albornoz, J. Sabina de Lis, "The solvability of an elliptic system under a singular boundary condition", *enviado a publiación*, (2003).

[5] M. W. Hirsch, "Systems of differential equations which are competitive or cooperative: I, Limit sets", *SIAM J. Math. Anal.*, **13**, 6, (1982), 167-179.

[6] J. Keller, "Electrohydrodynamics I. The Equilibrium of a Charged Gas in a Container", *J. Rational Mech. Anal.*, **5** (1956), 715-724.

[7] J. Keller, "On solutions of $\Delta u = f(u)$", *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 503-510.

[8] A. Lair, A. Wood, "Existence of entire large positive solutions of semilinear elliptic systems", *J. Differential Equations*, **164** (2000), 380-394.

[9] C. Loewner, L. Nirenberg, "Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations", en *Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers).* Academic Press, New York, 1974, p. 245-272.

[10] R. Osserman, "On the inequality $\Delta u \geq f(u)$", *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 1641-1647.

1 Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. C/ Astrofísico Francisco Sánchez, 38271-La Laguna (Tenerife), España . E-mails: `jjgarmel@ull.es` (J. García) , `josabina@ull.es` (J. Sabina).

2 Departamento de Matemática. Universidad de Concepción, Concepción, Chile. E-mail: `rletelie@gauss.cfm.udec.cl`.