Problemas Elípticos Bajo una Condición de Contorno Singular

Jorge García Melián[1] José Sabina de Lis[2]

Mayo de 2001

Resumen

Se estudian en la presente comunicación la existencia, unicidad y posible no existencia de soluciones positivas $u \in C^2(\Omega)$ de la clase de problemas de contorno singular $-\Delta u = \lambda(x)u - a(x)u^p$ en Ω, $u_{|\partial\Omega} = +\infty$, donde $p > 1$ y $a(x) \geq 0$. Un papel clave lo desempeña la configuración y posición relativa con respecto a Ω del soporte $\overline{D}$ de la función $a(x)$.

Introducción

Este trabajo discute algunos aspectos de la existencia, unicidad y no existencia de soluciones positivas para la clase de problemas de contorno singular:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(x)u - a(x)u^p & \text{en } \Omega \\ u = +\infty & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

en donde $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, mientras los coeficientes funcionales $\lambda(x)$ y $a(x)$ son Hölderianos $\lambda, a \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Una solución clásica $u \in C^2(\Omega)$ de (1) se sobreentenderá que cumple la condición de contorno en el sentido de que $u(x) \to +\infty$ cuando dist $(x, \partial\Omega) \to 0+$. Para uso posterior fijaremos la notación $d(x) :=$ dist $(x, \partial\Omega)$.

La función $a(x)$ se supondrá *no negativa* mientras que el objetivo del trabajo consistirá en analizar cómo las propiedades de anulación de a, es decir las posiciones relativas del dominio Ω y del soporte de a, sop $a = \overline{D} := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}}$, influyen en la existencia de soluciones positivas del problema (1). A tal efecto supondremos que $D = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$ constituye un dominio acotado y de clase $C^{2,\alpha}$.

El problema (1) tiene su origen en el modelo logístico en dinámica de poblaciones, que describe el comportamiento de una especie biológica con densidad $v(x,t)$ y tasa de crecimiento intrínseca $\lambda \in \mathbb{R}^+$ que está confinada en un hábitat $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$. Los efectivos de la población fluctúan de unas zonas a otras de Ω_1 en virtud de movimientos migratorios. Asimismo la especie ejerce un mecanismo "autorregulatorio" sobre sí misma debido a la limitación de recursos disponibles en el medio. El formato matemático del modelo lo constituye el problema parabólico:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \lambda v - a(x)v^p & \text{en } \Omega_1 \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega_1, \end{cases} \tag{L}$$

en el que el coeficiente $a(x)$ mide la amplitud de la "competición"por la subsistencia entre individuos.

Un nuevo ingrediente incorporado recientemente al modelo (L) es la presencia de un "refugio", es decir de un subdominio $\Omega_0 \subset \Omega_1$ tal que $a(x) = 0$ para $x \in \Omega_0$, es decir $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{D} \neq \emptyset$ (véanse las referencias [5], [6], [10], [11]). La existencia de tales regiones donde la especie está libre de la "presión competitiva"dota al modelo (L) de características especiales que lo diferencian del caso $a(x) > 0$ en Ω_1 (es decir $\{a(x) = 0\} \cap \Omega_1 = \emptyset$ o bien $\Omega_1 \subset D$). En efecto, el comportamiento asintótico de sus soluciones positivas $v(x,t)$ está gobernado por el problema estacionario:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u - a(x)u^p \qquad \text{en } \Omega_1 \\ u &= +\infty \qquad\qquad\quad \text{en } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{1'}$$

Éste sólo admite una solución positiva (única) $u = u_\lambda(x)$ cuando λ cumple $\lambda_1(\Omega_1) < \lambda < \lambda_1(\Omega_0)$, donde para un dominio $Q \subset \mathbb{R}^N$, $\lambda_1(Q)$ representa el autovalor principal del operador $-\Delta$ bajo condiciones de Dirichlet en ∂Q. En tal rango de valores toda solución positiva $v(x,t)$ de (L) satisface $v(\cdot,t) \to u_\lambda$ en $C^{2,\alpha}(\Omega_1)$ para $t \to +\infty$. Esto contrasta con el caso $a(x) > 0$ en Ω_1 (el subdominio $\Omega_0 = \emptyset$) donde la existencia de la solución positiva u_λ y su carácter globalmente atractivo son válidos para todo $\lambda > \lambda_1(\Omega_1)$. Resulta por otra parte muy interesante la forma en que la solución positiva u_λ de (1)' se singulariza cuando $\lambda \to \lambda_1(\Omega_0)-$. Para fijar ideas supongamos que $\overline{D} \subset \Omega_1$ mientras $\Omega_0 = \Omega_1 \setminus \overline{D}$ es conexo. Entonces se tiene por un lado que:

$$u_\lambda(x) \to +\infty \qquad x \in \Omega_0,$$

cuando $\lambda \to \lambda_1(\Omega_0)-$. Por contra, y muy notablemente,

$$u_\lambda(x) \to u(x) \qquad x \in D,$$

en $C^{2,\alpha}(D)$ cuando $\lambda \to \lambda_1(\Omega_0)-$, donde $u(x)$ define la solución minimal del problema singular (1) en el que $\Omega = D$. Nos remitimos a [6] para una exposición detallada de las propiedades descritas, a [5] para el análisis del comportamiento asintótico de las soluciones positivas de (L) y a [9] para nuevos resultados de existencia de soluciones positivas de (1)' en el "caso refugio"$\Omega_0 \neq \emptyset$.

En consecuencia, la dinámica de poblaciones proporciona una nueva clase de ejemplos que sumar a la relación de trabajos clásicos sobre el problema singular (1) (funciones automorfas [2], superficies de curvatura negativa [12], electrohidrodinámica [8] y otras extensiones recientes [1], [3], [7] y relación de referencias allí contenidas).

A continuación estudiamos (1) en tres contextos que casi cubren la totalidad del espectro de posibilidades: i) el caso en que $D = \Omega$ ($a > 0$ en Ω), ii) cuando el refugio $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$ "invade"parte de $\partial\Omega$ y iii) la situación de refugio interior $\overline{\Omega_0} = \overline{\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}} \subset \Omega$. A ello se dedican, respectivamente, las secciones que siguen.

Competición total en Ω

Supondremos en esta sección que $a \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $a \geq 0$ con $a > 0$ en Ω, $a_{|\partial\Omega} = 0$, que son las condiciones naturales bajo las que (1) se estudió en dinámica de poblaciones (ver §1 y [6]). Debe destacarse que el caso $a > 0$ en $\overline{\Omega}$ (es decir $\overline{\Omega} \subset D$) es técnicamente más sencillo y ha sido largamente tratado en la literatura (ver referencias en [7]). Bajo estas condiciones las peculiaridades de (1) se recogen en el siguiente resultado.

Teorema 1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $C^{2,\alpha}$, $\lambda, a \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ mientras $D = \Omega$, $D := \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

i) El problema (1) admite sendas soluciones minimal y maximal $\underline{u}, \overline{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ dentro de la clase de las soluciones positivas. Si $\lambda(x) > 0$ en $\overline{\Omega}$ se tiene además la estimación:

$$u(x) \geq \inf_{\Omega} \left(\frac{\lambda(x)}{a(x)} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

ii) Cualquier pareja $u_1, u_2 \in C^2(\Omega)$ de soluciones positivas de (1) cumpliendo:

$$\lim_{d(x)\to 0+} \frac{u_1(x)}{u_2(x)} = 1, \tag{2}$$

coinciden en Ω, es decir $u_1 = u_2$.

iii) Si a decae a cero de forma potencial en $\partial\Omega$, es decir:

$$\lim_{d(x)\to 0+} \frac{a(x)}{d(x)^\gamma} = C_0, \tag{3}$$

para ciertas constantes $\gamma, C_0 > 0$, entonces todo par de soluciones de (1) cumple (2). Por tanto, dicho problema sólo admite una solución positiva.

Observaciones 2 a) La demostración de las propiedades establecidas en el teorema 1 se recoge en [7], en donde se estudia además una clase general de perturbaciones del problema (1).

b) La unicidad de soluciones bajo la condición de tangencia (3) fue obtenida independientemente en [7] y [4]. Sin embargo, los resultados de [7] son mucho más ambiciosos. En efecto se prueba que todas las soluciones satisfacen en $\partial\Omega$ una precisa estimación asintótica de la forma:

$$u = Ad^{-\alpha}(1 + Bd + o(d)) \qquad d \to 0+, \tag{4}$$

donde $a(x) = C_0 d^\gamma(1 + C_1 d + o(d))$, $\alpha = (\gamma + 2)/(p - 1)$, $A = (\alpha(\alpha + 1)/C_0)^{1/(p-1)}$ y $B = ((N - 1)H - (\alpha + 1)C_1)/(\gamma + p + 3)$, siendo H la curvatura media de la frontera $\partial\Omega$.

c) Las conclusiones del teorema 1 siguen siendo válidas si Ω en el problema (1) es tal que $\partial\Omega$ consta de k componentes conexas $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ de suerte que $u_{|\Gamma_i} = +\infty$ en las q primeras $1 \leq i \leq q$, mientras en las $k - q$ restantes ponemos un dato positivo finito $\sigma_j(x) \in C^\alpha(\Gamma_j)$: $u_{|\Gamma_j} = \sigma_j$, $q + 1 \leq j \leq k$ (ver [7]).

Contacto entre el refugio y la frontera

A diferencia de la sección anterior nos ocupamos aquí del caso en que $D = \{a(x) > 0\}$ es más pequeño que Ω en un sentido ligeramente más restrictivo que las meras relaciones $D \subset \Omega$ y $\Omega \setminus \overline{D} \neq \emptyset$. En efecto, requeriremos que una parte no trivial de la frontera $\partial\Omega$ resulte expuesta al "refugio"$\{a(x) = 0\}$ por "ambos"lados. Más precisamente, que $\Omega \setminus \overline{D}$ admita al menos una componente conexa Ω_0 tal que $\partial\Omega \cap \partial\Omega_0$ tenga interior no vacío en $\partial\Omega$.

Preparamos ahora el terreno a nuestros próximos resultados que establecen –bajo condiciones de finitud en el número de componentes de $\Omega \setminus \overline{D}$– la no existencia de soluciones de (1) si $\{a = 0\}$ corta una zona significativa de $\partial\Omega$.

La observación clave es la siguiente. Si (1) admite una solución $u \in C^2(\Omega)$ y $u_n \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ designa la solución del "problema finito":

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda(x)u - a(x)u^p & \text{en } \Omega \\ u &=& n & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{5}$$

con $n \in \mathbb{N}$, se tiene entonces que:

$$u(x) \geq \operatorname{lím} u_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(x). \tag{6}$$

De hecho, u_n es creciente y $u_n \to \underline{u}$ en $C^{2,\alpha}(\Omega)$, $\underline{u}$ la solución minimal de (1).

Se hace sin embargo necesario aclarar la resolubilidad, para cada $n \in \mathbb{N}$, del problema (5). Ésta es, por ejemplo, equivalente a la existencia de una supersolución $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que sea positiva en $\overline{\Omega}$. En efecto, basta aplicar el método de sub y supersoluciones. Para esclarecer la existencia de tal supersolución afinamos un poco más en la estructura de $\Omega \setminus \overline{D}$. Supondremos que $\Omega \setminus \overline{D}$ admite $N_1 + N_2$ componentes conexas, las N primeras $\Omega_{0,1}, \ldots, \Omega_{0,N_1}$ tales que $\partial\Omega \cap \partial\Omega_{0,i}$ tiene interior no vacío en $\partial\Omega$, $1 \leq i \leq N_1$, el segundo grupo $\Omega_{0,N_1+1}, \ldots, \Omega_{0,N_1+N_2}$ cumpliendo $\overline{\Omega}_{0,N_1+j} \subset \Omega$, $1 \leq j \leq N_2$.

Así, la hipótesis de existencia de una solución $u \in C^2(\Omega)$ del problema (1) lleva a las desigualdades:

$$\lambda_1^{\Omega_{0,i}}[-\Delta - \lambda(x)] \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N_1, \qquad \lambda_1^{\Omega_{0,N_1+j}}[-\Delta - \lambda(x)] > 0, \quad 1 \leq j \leq N_2, \tag{7}$$

mientras que una delicada construcción permite obtener la existencia de la supersolución positiva finita u^* siempre que *todas* las desigualdades en (7) sean estrictas, $\lambda_1^{\Omega_{0,i+j}}[-\Delta - \lambda(x)] > 0$, $1 \leq i + j \leq N_1 + N_2$. Sin embargo, nuestro objetivo es llegar a una estimación similar a (6) donde la sucesión u_n sea constructible. A tal fin introducimos un problema auxiliar donde las desigualdades (7) resultan ser estrictas.

En efecto, escogemos $\bar{\lambda} \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ tal que $\bar{\lambda}(x) \leq \lambda(x)$ en $\mathbb{R}^N$. Se tiene entonces que $u(x)$ define una supersolución del problema singular:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \bar{\lambda}(x)u - a(x)u^p & \text{en } \Omega \\ u &=& +\infty & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{8}$$

lo que permite asegurar que éste admite una solución positiva $u_-(x) \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ que cumple además: $u_-(x) \leq u(x)$ en Ω. Por otra parte se deduce de (7) el carácter estricto de las desigualdades:

$$\lambda_1^{\Omega_{0,i}}[-\Delta - \bar{\lambda}(x)] > 0, \quad 1 \leq i \leq N_1, \qquad \lambda_1^{\Omega_{0,N_1+j}}[-\Delta - \bar{\lambda}(x)] > 0, \quad 1 \leq j \leq N_2. \tag{9}$$

Como se dijo, esto conlleva a su vez la existencia de una supersolución $u_-^* \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de la ecuación $-\Delta u = \bar{\lambda}(x)u - a(x)u^p$, $u_-^* > 0$ en $\overline{\Omega}$, lo que asimismo garantiza la existencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, de la solución clásica $u_n^- \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ del problema:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \bar{\lambda}(x)u - a(x)u^p & \text{en } \Omega \\ u & = & n & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{10}$$

Podemos entonces concluir que:

$$u(x) \geq u_-(x) \geq \lim u_n^-(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n^-(x) \qquad x \in \Omega,$$

y es precisamente u_n^- la sucesión de funciones a la que hace referencia el siguiente resultado.

Teorema 3 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domino acotado y $C^{2,\alpha}$, $a, \lambda \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ tal que $a \geq 0$, $D = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$ es un subdominio $C^{2,\alpha}$ de Ω de suerte que $\Omega \setminus \overline{D}$ posee un número finito de componentes conexas $\Omega_{0,1}, \ldots, \Omega_{0,N_1}, \ldots, \Omega_{0,N_1+N_2}$ tales que:*

i) $\overline{\Omega}_{0,N_1+j} \subset \Omega$, $j = 1, \ldots, N_2$.

ii) Existe un dominio $Q \subset \mathbb{R}^N$ de clase $C^{2,\alpha}$ con $Q \cap \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$ y de forma que $\Omega \cap Q = \Omega_{0,1} \cup \cdots \cup \Omega_{0,N_1}$.

Admitamos que la ecuación:

$$-\Delta u = \lambda u - a(x)u^p,$$

admite una supersolución $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u^* > 0$ en $\overline{\Omega}$, mientras $u_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ designa la solución positiva de $-\Delta u = \lambda u - a(x)u^p$ en Ω, $u_{|\partial\Omega} = n$. Se satisface entonces que:

$$\lim u_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) = +\infty,$$

uniformemente sobre compactos de cada $\Omega_{0,i}$, $1 \leq i \leq N_1$.

Corolario 4 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $C^{2,\alpha}$, $a, \lambda \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, donde $a \geq 0$ y su región de positividad $D = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\} \subset \Omega$ es un dominio $C^{2,\alpha}$ tal que $\Omega \setminus \overline{D}$ admite $N_1 + N_2$ componentes conexas $\{\Omega_{0,1}, \ldots, \Omega_{0,N_1}\}, \{\Omega_{0,N_1+1}, \ldots, \Omega_{0,N_1+N_2}\}$ que satisfacen $\overline{\Omega}_{0,N_1+j} \subset \Omega$, $1 \leq j \leq N_2$, mientras existe un dominio $Q \subset \mathbb{R}^N$ de clase $C^{2,\alpha}$ con $Q \cap \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$ de forma que $\Omega \cap Q = \Omega_{0,1} \cup \cdots \cup \Omega_{0,N_1}$. Entonces el problema singular (1) carece de soluciones positivas.*

Observaciones 5 Una demostración detallada del teorema 3 aparecerá en un trabajo en preparación. Debe observarse por otra parte que la validez de los resultados sólo requiere la existencia de una componente en el primer grupo $\{\Omega_{0,i}\}_{1\leq i\leq N_1}$ siendo irrelevante la presencia de las del segundo. Como veremos a continuación, la conclusión del corolario 4 es falsa si sólo hay componentes de éste último, $\{\Omega_{0,N_1+j}\}_{1\leq j\leq N_2}$.

Refugio interior

Consideramos ahora el caso hasta cierto punto complementario del anterior en el que siendo $D = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$ un subdominio de Ω resulta que todas las posibles componentes Ω_0 de $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$ cumplen $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, lo que implica en particular que $\partial\Omega$ sólo tiene contacto por el "exteriorçon $\{a(x) = 0\}$.

Usando hipótesis del estilo de la sección anterior admitiremos que $\Omega \setminus \overline{D}$ está integrado por un número finito de componentes $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M}$. Resulta interesante el hecho de que una condición necesaria para la existencia de una solución positiva $u \in C^2(\Omega)$ del problema singular (1) es que:

$$\lambda_1^{\Omega_{0,i}}[-\Delta - \lambda(x)] > 0 \qquad 1 \leq i \leq M. \tag{11}$$

En efecto, es ello consecuencia de que la restricción $u_i = u_{|\Omega_{0,i}}$, $1 \leq i \leq M$, define una supersolución positiva estricta de la ecuación $-\Delta u = \lambda(x)u$ en $\Omega_{0,i}$. Resulta asimismo notable que (11) es además condición suficiente para la existencia de una solución positiva del problema singular (1). En efecto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$, $\lambda \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ en tanto que $a \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$ es una función no negativa tal que $D = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$ constituye un dominio $C^{2,\alpha}$ para el que $\Omega \setminus \overline{D}$ consta de M componentes conexas $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M}$ fuertemente contenidas en Ω, es decir $\overline{\Omega}_{0,i} \subset \Omega$, $1 \leq i \leq M$.*

Se tienen entonces las siguientes afirmaciones:

i) Si el problema (1) admite una solución positiva $u \in C^2(\Omega)$ se habrán de cumplir entonces las desigualdades (11):

$$\lambda_1^{\Omega_{0,i}}[-\Delta - \lambda(x)] > 0, \tag{11}$$

para $i = 1, \dots, M$.

ii) Recíprocamente, si se dan las relaciones (11) entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ el problema de contorno finito:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda(x)u - a(x)u^p & \text{en } \Omega \\ u &=& n & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{12}$$

admite una única solución clásica $u_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Lo que es más importante,

$$\underline{u}(x) = \lim u_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(x) < +\infty,$$

para cada $x \in \Omega$. Más aún, el límite es válido en $C^{2,\alpha}(\Omega)$ y $\underline{u}$ define la solución minimal del problema (1).

Observaciones 7 a) Como se ha dicho $a = 0$ en $\partial\Omega$ mientras $a > 0$ si $x \in \Omega$ y $d(x) = \text{dist}\,(x, \partial\Omega)$ es suficientemente pequeña. Si además a decae a cero en forma potencial como en (3), cuando $d(x) \to 0+$ entonces la solución del problema (1) es *única* bajo las condiciones del teorema 6. Nótese que no se requiere que a cumpla (3) en la frontera $\partial\Omega_{0,i}$, $1 \leq i \leq M$, de las componentes interiores donde también $a_{|\partial\Omega_{0,i}} = 0$.

b) La parte crucial en la prueba del teorema 6 consiste en establecer que la sucesión de soluciones u_n de los problemas (12) está uniformemente acotada sobre cada componente $\overline{\Omega}_{0,i}$, $1 \leq i \leq M$. Este hecho combinado con la observación 2, c) permite concluir la existencia de la solución minimal de (1). Tal acotación se consigue sin dificultad, mediante el principio del máximo, si $\lambda(x) \leq 0$ en Ω. El caso $\lambda(x) \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$ general es sin embargo más delicado y la demostración se recogerá en un trabajo en preparación. Una pieza clave para la misma es una estimación exacta de la derivada normal de las soluciones del problema auxiliar (12). Por su interés intrínseco la incluimos a continuación en formato de teorema.

Teorema 8 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $C^{2,\alpha}$ mientras que, para $u_0 > 0$, $u = u(x, u_0) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ designa la solución positiva clásica del problema:*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - Au^p & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde λ, A son constantes positivas. Si $\nu = \nu(x)$ designa la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$ se tiene entonces la estimación:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\cdot, u_0) \sim \sqrt{\frac{2A}{p+1}}\, u_0^{\frac{p+2}{2}},$$

cuando $u_0 \to +\infty$.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado con cargo al proyecto BFM2000-0797 de la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnonlogía.

Referencias

[1] Bandle C., Marcus M., "On second order effects in the boundary behaviour of large solutions of semilinear elliptic problems", *Differential Integral Equations*, **11**, 1, (1998), 23-34.

[2] Bieberbach L., "$\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen", *Math. Ann.*, **77**, (1916), 173-212.

[3] Del Pino M., Letelier-Albornoz R., "The influence of domain geometry in boundary blow-up elliptic problems", *Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appls.*, (2001), por aparecer.

[4] Du Y., Huang Q., "Blow-up solutions for a class of semilinear elliptic and parabolic equations", *SIAM J. Math. Anal.*, **31**, 1, (1999), 1-18.

[5] Fraile J., Koch P., López-Gómez J., Merino S., "Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear equation", *J. Differential Equations*, **127**, (1996), 295-319.

[6] García-Melián J., Gómez-Reñasco R., López-Gómez J., Sabina de Lis J., "Point-wise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear problems where bifurcation from infinity occurs", *Arch. Rational Mechanics Anal.*, **145**, (1998), 261-289.

[7] García-Melián J., Letelier-Albornoz R., Sabina de Lis J., "Uniqueness and asymptotic estimates for solutions of semilinear problems with boundary blow-up", *Proceedings Am. Math. Soc.*, (2001), por aparecer.

[8] Keller J. B., "On solutions of $\Delta u = f(u)$", *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**, (1957), 503-510.

[9] López-Gómez J., "Large solutions, metasolutions and asymptotic behaviour of the regular positive solutions of a class of sublinear parabolic problems with refuges", *Nonlinear Differential Equations, Electron J. Differential Equations, Conf. 05*, (2000), pp 135-171. http://ejde.math.swt.edu.

[10] López-Gómez J., Sabina de Lis J., "Coexistence states and global attractivity for the convective diffusive competition model", *Transactions Amer. Math. Soc.*, **347**, 10, (1995), 3797-3833.

[11] López-Gómez J., Sabina de Lis J., "First variations of principal eigenvalues with respect to the domain and point-wise growth of positive solutions for problems where bifurcation from infinity occurs", *J. Differential Equations*, **148**, (1998), 47-64.

[12] Osserman R., "On the inequality $\Delta u \geq f(u)$", *Pacific J. of Maths.*, **7**, (1957), 1641-1647.

1,2 Departamento de Análisis Matemático. Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna. C/ Astrofísico Francisco Sánchez s/n. 38271-La Laguna (Tenerife), España.

[1] e-mail: `jjgarmel@ull.es`, [2] e-mail: `josabina@ull.es`.