Fenómenos de bifurcación en problemas de difusión no lineal

J. García Melián [1]   J. Sabina de Lis [1]

Resumen

El objetivo del trabajo es dar una descripción detallada de los fenómenos de bifurcación a infinito de una clase de problemas de tipo logístico que involucran al operador p-Laplaciano $-\Delta_p$. Como resultado auxiliar de gran valor en sí mismo se incluye una descripción precisa de las propiedades de perturbación del autovalor principal $\lambda_{1,p}(\Omega)$ de $-\Delta_p$ con respecto al dominio Ω.

Introducción

Los problemas de tipo logístico:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u - a(x)u^q \qquad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $q > 2$ han jugado un papel fundamental como banco de pruebas para el análisis no lineal y, en particular, en la teoría de problemas de autovalores no lineales.

El problema es "propiamente" logístico cuando $a \geq 0$, $a \neq 0$. Una fenomenología interesante surge cuando a tiene un soporte $\overline{D} \subset \Omega$ y, en consecuencia, $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{D}$ es un abierto no vacío. El análisis completo de este caso se recoge en [6], [14], mientras algunos aspectos básicos de existencia y unicidad están ya implícitos en [3].

Un estudio cualitativo y numérico detallado de los fenómenos de bifurcación en el infinito, tanto del problema logístico como de sus perturbaciones, ha sido desarrollado recientemente en [11] y [15]. En el presente trabajo nos ocupamos de las extensiones no triviales de parte de estos resultados al contexto del operador p-Laplaciano.

Hipótesis. El problema logístico

El problema del que nos vamos a ocupar, llamado "logístico" en dinámica de poblaciones es

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda u^{p-1} - a(x)u^q \qquad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{L}$$

en el que Ω es un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$ en $\mathbb{R}^n$, $\Delta_p = \operatorname{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ en sentido de las distribuciones con dominio en $W_0^{1,q}(\Omega)$, es el operador p-Laplaciano. Supondremos que $q > p-1 > 1$. En cuanto a la función peso $a = a(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, supondremos que es una función no negativa, con soporte $\overline{D} \subset \Omega$. Más aún, supondremos que $\Omega_0 := \Omega \setminus \overline{D}$ es conexo, admitiendo D un número finito de componentes conexas $D_1, \ldots, D_N$ que son dominios de $\mathbb{R}^n$ de clase C^3. Este grupo de hipótesis asociadas a la función peso a (coeficiente de autocompetición en dinámica de poblaciones) serán designadas por (H_a).

Junto con el problema (L) consideraremos el problema logístico perturbado:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda u^{p-1} - a(x)(u^q + g(x,u)) \qquad \text{en } \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{LP}$$

en el que la no linealidad $g = g(x,u) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisface las condiciones de crecimiento en $u = 0$ y en el infinito siguientes:

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(x,u)}{u^{p-1}} = 0 \qquad \lim_{u \to \infty} \frac{g(x,u)}{u^q} = 0, \tag{1}$$

uniformemente en $x \in \overline{\Omega}$.

Para uso posterior designaremos por $\lambda_{1,p}(G)$ el primer autovalor Dirichlet de $-\Delta_p$ en un dominio acotado $G \subset \mathbb{R}^n$. Es bien conocido ([2], [7]) que $\lambda_{1,p}(G)$ es simple y el único autovalor λ del problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda u^{p-1} \qquad \text{en } G \\ \quad u &= 0 \qquad\quad\;\; \text{en } \partial G, \end{cases}$$

que admite una autofunción positiva $\phi \in W_0^{1,q}(\Omega)$. La caracterización variacional es

$$\lambda_{1,p}(G) = \inf_{u \in W_0^{1,q}(G)} \frac{\int_G |\nabla u|^p \, dx}{\int_G |u|^p \, dx}. \tag{2}$$

Existencia de soluciones positivas

Nuestro primer resultado recoge los aspectos básicos de existencia y unicidad para el problema (L).

Teorema 1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$ mientras la función peso $a \in C^\alpha(\Omega)$ y su soporte $\overline{D}$ satisfacen (H_a). Entonces el problema (L) sólo admite soluciones débiles positivas $u \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ si λ satisface:*

$$\lambda_{1,p}(\Omega) < \lambda < \lambda_{1,p}(\Omega_0). \tag{3}$$

Además, para cada λ satisfaciendo (3) el problema (L) admite una única solución positiva:

$$u = \theta_\lambda^{(p)} \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

verificando las propiedades siguientes:

i) Existe un $\beta \in (0,1)$ independiente de $\lambda \in (\lambda_{1,p}(\Omega), \lambda_{1,p}(\Omega_0))$ tal que $\theta_\lambda^{(p)} \in C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$, $\theta_\lambda^{(p)} > 0$ en Ω y,

$$\frac{\partial \theta_\lambda^{(p)}}{\partial \nu} < 0 \qquad x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

donde ν es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$. Por otro lado existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$u \in C^{2,\alpha}(\{x \in \Omega : \mathrm{d}(x, \partial\Omega) \le \varepsilon\}).$$

ii) La aplicación $\lambda \to \theta_\lambda^{(p)}$ *es continua y creciente estrictamente en* $\lambda_{1,p}(\Omega) < \lambda < \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ *con valores en* $C_0^{1,\beta_0}(\Omega)$ *para todo* $\beta_0 \in (0,\beta)$.

iii) La curva de soluciones positivas $\theta_\lambda^{(p)}$ *bifurca de* $u = 0$ *en* $\lambda = \lambda_{1,p}(\Omega)$ *es decir:*

$$\theta_\lambda^{(p)} \to 0 \qquad en\ C_0^{1,\beta_0}(\overline{\Omega}), \tag{5}$$

para $\lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega)+$, *mientras* $\theta_\lambda^{(p)}$ *bifurca desde el infinito en* $\lambda = \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ *en el sentido de que:*

$$|\theta_\lambda^{(p)}|_\infty \to +\infty \qquad \lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega_0)-. \tag{6}$$

Observación 2 a) El mismo resultado se satisface para el problema perturbado (LP) si el término no lineal $g = g(x,u)$ es, además de las hipótesis dadas de regularidad y crecimiento, estrictamente creciente en $u \geq 0$.

b) La no existencia de soluciones para $\lambda \leq \lambda_{1,p}(\Omega)$ es consecuencia de la caracterización variacional (2) de $\lambda_{1,p}(\Omega)$ si tomamos una hipotética solución positiva $u \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ como función test en la definición de solución débil.

Si por otro lado, $u \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ fuese una solución positiva correspondiente a $\lambda \geq \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ tendríamos $-\Delta_p u = \lambda u^{p-1}$ en Ω_0, mientras $u = 0$ en $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$ pero $u > 0$ en $\partial\Omega_0 \cap \partial D$. Por tanto el problema de autovalores para $-\Delta_p - \lambda$ admite una supersolución positiva. Según los resultados de [7] ello implicaría $\lambda < \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ contra lo supuesto.

La existencia y unicidad está implícita en el argumento variacional de [5] (generalización del de [3]), mientras puede darse una prueba alternativa de existencia por el método de sub y supersoluciones ([8]) obteniendo después la unicidad de las desigualdades en [5] o [2].

c) La monotonía es consecuencia de que $\theta_{\lambda_1}^{(p)}$ es supersolución de (L) cuando $\lambda < \lambda_1$. Las estimaciones $C^{1,\beta}$ de [13] proporcionan la regularidad Hölder de las soluciones, mientras que su positividad y (4) se siguen del principio fuerte del máximo en [16].

d) Las estimaciones $C^{1,\beta}$ son cruciales para probar las propiedades de bifurcación (5) y (6) del teorema. Es importante subrayar que la bifurcación desde el cero en $\lambda_{1,p}(\Omega)$ *no es consecuencia* del resultado de bifurcación en [4]. Éste no permite discernir el signo ni la dirección de las soluciones bifurcadas.

Nuestro próximo resultado asegura que el problema perturbado (LP) retiene los hechos básicos del problema (L). Por un lado, la existencia de soluciones positivas en el rango (3), $\lambda_{1,p}(\Omega) < \lambda < \lambda_{1,p}(\Omega_0)$, acompañada –como veremos más tarde– de bifurcación en el infinito para $\lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega_0)$. Por otro, la no existencia de soluciones positivas para $\lambda \geq \lambda_{1,p}(\Omega_0)$. Mientras lo estudiado en el caso regular $p = 2$ ($\Delta_p = \Delta$) permite garantizar la existencia de múltiples soluciones cerca de $\lambda_{1,p}(\Omega)$ (usar Crandall-Rabinowitz y $g = \gamma u^q + o(u^q)$ con $\gamma < -1$) la teoría de la bifurcación local disponible para el Laplaciano p es insuficiente para dar una prueba rigurosa de este hecho en un dominio general Ω. No obstante los autores han obtenido ya resultados en esta línea bajo simetría radial ([9],[10]). Otra conclusión esperable a raíz del caso regular $p = 2$ es unicidad para $\lambda \sim \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ ([11], [14]), bajo restricciones sobre, por ejemplo, la amplitud del peso a. Aunque no nos ocuparemos aquí de esta cuestión, esta clase de resultados es también válida para (LP) ([10]).

Las propiedades generales del problema perturbado se recogen en el siguiente resultado.

Teorema 3 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado $C^{2,\alpha}$ en tanto que $a = a(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ satisface, junto con su soporte $\overline{D}$ las hipótesis (H_a), mientras el término $g = g(x,u) \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ verifica las condiciones de crecimiento (1). Entonces el problema perturbado (LP) presenta las siguientes propiedades:*

i) Para cada $\lambda_{1,p}(\Omega) < \lambda < \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ existe una solución débil $u = u_\lambda(\Omega) \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

ii) Si u_λ es la familia de soluciones del apartado i) entonces existe $0 < \beta < 1$ tal que $u_\lambda \in C_0^{1,\beta}(\Omega)$ con β independiente de λ. Además $u_\lambda > 0$ en Ω mientras $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} < 0$ en $\partial\Omega$ con ν la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

iii) Si $u = v_\lambda \in W_0^{1,q}(\Omega)$ es cualquier *familia de soluciones positivas de (LP) definida en $\lambda_{1,p}(\Omega) < \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ entonces se tiene la condición de bifurcación en el infinito:*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega_0)-} |v_\lambda|_\infty = +\infty. \tag{7}$$

Observación 4 a) La no existencia de soluciones débiles positivas para $\lambda \geq \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ se demuestra exactamente como en el caso del problema (L). De ahí, con ayuda de las estimaciones $C^{1,\beta}$, se prueba la divergencia a infinito (7) de tales soluciones cuando $\lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega_0)$.

b) La existencia de una familia de soluciones débiles en el rango (3) se puede conseguir vía el método de sub y supersoluciones ([8]).

En efecto, y razonando como en [1] un pequeño múltiplo $\underline{u}_\lambda = \varepsilon_0\phi_1$, $\varepsilon_0 > 0$, de la autofunción principal positiva ϕ_1, $|\phi_1|_\infty = 1$ siempre da lugar a una subsolución de (LP) para $\lambda > \lambda_{1,p}(\Omega)$.

Conseguir supersoluciones, como muestra la condición (7) es sumamente más delicado. Para ello y fijado $\lambda_{1,p}(\Omega) < \lambda < \lambda_{1,p}(\Omega_0)$ tomamos $0 < \varepsilon < 1$. Le corresponde $m = m(\varepsilon)$ tal que:

$$-\varepsilon u^q \leq g(x,u) \leq \varepsilon u^q \qquad u \geq m, x \in \overline{\Omega}. \tag{8}$$

Consideramos el problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda u^{p-1} - (1-\varepsilon)a(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

que admite una única solución positiva $u = v_\lambda$. Puede hallarse una constante positiva $c > 0$ de suerte que $\inf_D cv_\lambda > m$. Por otro lado si además $c > 1$ y fijamos $\overline{u}_\lambda = cv_\lambda$ se tiene $-\Delta_p\overline{u}_\lambda \geq \lambda\overline{u}_\lambda^{p-1} - a(x)(\overline{u}_\lambda^q + g(x,\overline{u}_\lambda))$, $x \in \Omega$, en el sentido de las distribuciones. Por ello puede concluirse que $\overline{u}_\lambda$ es una supersolución débil de (LP). Gracias al principio fuerte del máximo ([16]) pueden elegirse $\varepsilon_0 \sim 0+$, $c > 1$ convenientes para que $\underline{u}_\lambda \leq \overline{u}_\lambda$ en Ω.

c) Debe destacarse que no hay teoría de la bifurcación directa que permita concluir la existencia, siquiera local, de un continuo de soluciones *positivas* de (LP) bifurcando desde $u = 0$ en $\lambda = \lambda_{1,p}(\Omega)$. La teoría de, por ejemplo [4], es insuficiente a estos efectos.

Perturbación de dominios

Una de las conclusiones más interesantes recogidas en [11] y [15] precisa con detalle cómo es la divergencia (6) y (7) de las soluciones positivas de los problemas (L) y (LP) cerca de $\lambda_{1,p}(\Omega_0)$. Por ejemplo, y haciendo uso de la derivabilidad con respecto a λ de la solución positiva θ_λ de:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda u - a(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u &=& 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{10}$$

se prueba que ésta diverge puntualmente hacia $+\infty$ en Ω_0:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega_0)} \theta_\lambda(x) = +\infty \qquad x \in \Omega_0. \tag{11}$$

La divergencia a infinito se prueba ser incluso uniforme sobre compactos de $\Omega_0 \cup \partial D$. En el contexto del problema (L) la técnica de derivación con respecto a λ está fuera de uso porque la ecuación variacional asociada a (L) carece de propiedades "razonables". En particular, los aspectos más elementales de teoría espectral.

Aquí seguiremos, para el estudio del comportamiento puntual de las soluciones de (L) y (LP) cuando $\lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega_0)$, el camino alternativo de la perturbación de dominios, trazado para el caso $p = 2$ en [11], [15].

A tales efectos estudiaremos las propiedades de perturbación de $\lambda_{1,p}(G)$ con respecto al dominio G siguiendo el denominado "método de las variaciones interiores" de Hadamard. Consideramos, por tanto, una familia de difeomorfismos de clase C^2, $T = T_\delta(x) \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $|\delta| < \varepsilon$. Supondremos además que T_δ es real-analítica en el parámetro de perturbación δ en el sentido de que T_δ admite el desarrollo en serie de potencias:

$$T_\delta(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n R^{(n)}(x), \tag{12}$$

donde $R^{(n)} \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$, cuyo radio de Hadamard es positivo, es decir,

$$\overline{\lim}\ \{\sup_{\overline{G}} |R^{(n)}(x)| + \sup_{\overline{G}} |DR^{(n)}(x)| + \sup_{\overline{G}} |D^2 R^{(n)}(x)|\}^{1/n} < +\infty.$$

Bajo está óptica observamos a $G_\delta = T_\delta(G)$, como el dominio perturbado, fijando $G_0 := G$, el dominio de referencia.

En consecuencia, el problema de perturbación de autovalores consiste en estudiar la dependencia de $\lambda_{1,p}(\delta) := \lambda_{1,p}(G_\delta)$, el autovalor principal del problema:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_p u &=& \lambda u^{p-1} & \text{en } G_\delta \\ u &=& 0 & \text{en } \partial G_\delta, \end{array}\right. \tag{13}$$

con respecto a δ. En términos variacionales,

$$\begin{aligned}\lambda_{1,p}(\delta) &= \inf_{\tilde{u}\in W_0^{1,q}(G_\delta)} \frac{\int_{G_\delta} |\nabla \tilde{u}|^p \ dx}{\int_{G_\delta} |\tilde{u}|^p \ dx} \\ &= \inf_{u\in W_0^{1,q}(G_0)} \frac{\int_{G_0} |D(x,\delta)\nabla u|^p C(x,\delta) \ dx}{\int_{G_0} |u|^p C(x,\delta) \ dx},\end{aligned} \tag{PV}$$

donde $D(x,\delta) = (D_x T_\delta(x))^{-1}$, $C(x,\delta) = |\det\ (D_x T_\delta(x))|$.

Cuando en lugar del p-Laplaciano se considera el ambiente lineal del operador $-\Delta$, el problema de perturbación propuesto se estudia en el contexto de las familias holomorfas de "tipo-A" de Kato (cf. [12]), concluyéndose que $\lambda_{1,2}(\delta)$ es analítica en δ (estos resultados se remontan a Rellich y Nagy).

En el escenario del operador Δ_p estos resultados son –simplemente– desconocidos en la literatura. Un primer aspecto básico de aproximación es el que sigue.

Lema 5 *Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado $C^{2,\alpha}$, $\lambda_{1,p} = \lambda_{1,p}(\delta)$ el autovalor principal del problema (13) en el dominio $G_\delta = T_\delta(G_0)$, donde T_δ es una familia de difeomorfismos C^2 que es real analítica en δ en el sentido de (12). Entonces:*

i) La función $\lambda_{1,p} = \lambda_{1,p}(\delta)$ es continua en $|\delta| \le \varepsilon$.

ii) Si $\phi_{1,\delta}$ es la autofunción positiva en G_δ que cumple $|\phi_{1,\delta}|_\infty = 1$ entonces:

$$\phi_{1,\delta} \to \phi_1,$$

en $C_0^{1,\beta_0}(G_0)$ cuando $\delta \to 0$ para un cierto $0 < \beta_0 < 1$, donde ϕ_1 es la autofunción normalizada positiva de (13) en $\delta = 0$.

El resultado fundamental es el siguiente lema abstracto de derivabilidad de problemas variacionales. La prueba se omite, siendo recogida en el trabajo en elaboración [10].

Lema 6 *Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$, $A = A(x,\delta,\xi) \in C^1(\overline{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $B = B(x,\delta,z) \in C^1(\overline{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Supongamos que el problema variacional:*

$$\lambda(\delta) = \inf_{u\in W_0^{1,q}(G)} J_\delta(u) := \inf_{u\in W_0^{1,q}(G)} \frac{\int_G A(x,\delta,\nabla u) \ dx}{\int_G B(x,\delta,u) \ dx},$$

admite, para $|\delta| \le \varepsilon$, una única solución normalizada *$u = u_\delta$ que tiene la propiedad $u_\delta \to u_0$ en $C^1(\overline{G})$, u_0 la solución del problema para $\delta = 0$. Entonces, la función $\lambda = \lambda(\delta)$ resulta ser derivable y, lo que es más importante,*

$$\lambda'(0) = \frac{\int_G \{A_1(x,0,\nabla u_0) - \lambda_0 B_1(x,0,u_0)\} \ dx}{\int_G B(x,0,u_0) \ dx}, \tag{14}$$

donde $A_1 = \partial_\delta A$, $B_1 = \partial_\delta B$ y $\lambda_0 = \lambda(0)$.

El lema 6 puede aplicarse al problema de perturbación de autovalores para hallar una expresión explícita de la primera variación de $\lambda_{1,p}(G_\delta)$ con respecto a δ. En este sentido, el siguiente resultado extiende al contexto del p-Laplaciano la fórmula de variación del autovalor principal de $-\Delta$ recogida en [15].

Teorema 7 *Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$, $G_\delta = T_\delta(G)$ la perturbación de G asociada a una familia real analítica en $|\delta| < \varepsilon$ de difeomorfismos de clase C^2, $T = T_\delta(x)$. Entonces, el autovalor principal $\lambda_{1,p}(\delta) = \lambda_{1,p}(G_\delta)$ de $-\Delta_p$ en G_δ es derivable con respecto a δ. Lo que es más importante:*

$$\lambda'_{1,p}(0) = -(p-1) \int_{\partial G} \langle R^{(1)}, \nu \rangle \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} \right| \, d\sigma,$$

donde ν es la normal unitaria exterior y ϕ_1 la autofunción principal en $G_0 = G$ normalizada de forma que:

$$\int_G |\phi_1|^p \, dx = 1.$$

Comportamiento de las soluciones en el refugio Ω_0

Una de las consecuencias importantes del teorema 7 es la posibilidad de estimar con precisión cómo divergen a infinito las soluciones de los problemas (L) y (LP) cuando $\lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega_0)$, aunque este último no detenta la propiedad de unicidad de soluciones positivas. En efecto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$, $a = a(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ satisfaciendo, junto con su soporte $\overline{D}$ las hipótesis (H_a) y la restricción adicional de decrecimiento:*

$$a(x) = o(\operatorname{dist}(x, \partial D)), \tag{15}$$

cuando $\operatorname{dist}(x, \partial D) \to 0$. *Si $\{u_\lambda\}$ denota a la familia de soluciones positivas de (L) o a* cualquier *familia de soluciones positivas de (LP) para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_{1,p}(\Omega_0)$, donde g cumple las hipótesis (1), se tiene que:*

$$u_\lambda \to +\infty,$$

uniformemente sobre compactos de $\Omega_0 \cup \partial D$ cuando $\lambda \to \lambda_{1,p}(\Omega_0)$.

Una demostración pormenorizada del teorema 8 se recogerá en [10], así como un estudio detallado del perfil asintótico de las soluciones en la región complementaria D.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado con cargo al proyecto PB96-0621 de la DGES.

Referencias

[1] H. Amann, "Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces", *SIAM Review*, **18** (1976), 620-709.

[2] A. Anane, " Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids", *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, **305**, Série I, 725-728 (1987).

[3] H. Brezis and L. Oswald, "Remarks on sublinear elliptic equations", *Nonl. Anal. TMA*, **10**, 55-64 (1986).

[4] M. Del Pino and R. Manásevich, "Global Bifurcation from the Eigenvalues of the p-Laplacian", *J. Differential Equations* **92** 226-251 (1991).

[5] J. I. Díaz, E. Saa, "Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires", *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, **305**, Série I, 521-524 (1987).

[6] J. Fraile, P. Koch, J. López-Gómez, S. Merino S., "Elliptic eigenvalue value problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear equation", J. Differential Equations, **127**, 295-319 (1996).

[7] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, "Maximum and comparison principles for operators involving the p-Laplacian", *J. Math. Anal. Appl.*, **218**, 49-65 (1998).

[8] J. García-Melián, J. Sabina de Lis, "Uniqueness to quasilinear problems for the p-Laplacian in radially symmetric domains", por aparecer en *Nonlinear Analysis* (1999).

[9] J. García-Melián, J. Sabina de Lis, "A local bifurcation theorem for degenerate elliptic equations with radial symmetry", *preprint*.

[10] J. García-Melián, J. Sabina de Lis, Trabajo en preparación.

[11] R. Gómez-Reñasco, J. García-Melián, J. López-Gómez, J. Sabina de Lis, "Point-wise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **145**, 261-289 (1998).

[12] T. Kato, "Perturbation Theory for Linear Operators", Classics Math., *Springer Verlag*, Berlín/Nueva York, 1995.

[13] G. Lieberman, "Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations", *Nonlinear Anal.* **12** (1988), 1203-1219.

[14] J. López-Gómez, "On the uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems", *Boll. Un. Mat. Ital.* **11-B** 697-711 (1997).

[15] J. López-Gómez, J. Sabina de Lis, "First variations of principal eigenvalues with respect to the domain and point-wise growth of positive solutions for problems where bifurcation from infinity occurs", *J. Differential equations*, **148**, 47-64 (1998).

[16] J. L. Vázquez , "A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations", *Appl. Math. and Optimization*, **12**, 191-202 (1984).

1. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
38271 La Laguna. TENERIFE.