Unicidad de soluciones positivas para ecuaciones degeneradas en dominios con simetría radial

J. García Melián [1] J. Sabina de Lis [1]

Resumen

En este trabajo consideramos el problema $-\Delta_p u = \lambda f(u)$ en D, $u_{|\partial D} = 0$, donde $\Delta_p u = \text{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, D es un dominio acotado con simetría radial y f una función C^1 que tiene un cero $\bar{u}_0 > 0$ de orden $k \geq p-1$. En estas condiciones, en que se sabe que las soluciones positivas menores o iguales que $\bar{u}_0$ cumplen $0 < u < \bar{u}_0$, probamos que existe una única solución radial positiva con máximo próximo a $\bar{u}_0$ cuando λ es grande. Nuestro enfoque se basa en argumentos de continuación, que necesitan la diferenciabilidad del operador $(-\Delta_p)^{-1}$, siendo ésta una de las contribuciones más interesantes.

Introducción

En un artículo reciente (véase [4]), fue estudiada la clase de problemas

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = \lambda f(\lambda, u) \quad &\text{en} \quad D \\ u = 0 \quad &\text{en} \quad \partial D \, , \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\Delta_p u = \text{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el operador *laplaciano-p*, $p > 1$, y D es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con simetría radial (es decir, una bola o un anillo). La no linealidad $f(\lambda, \cdot)$ tiene un cero fijo $\bar{u}_0 > 0$ de orden k, $0 < k < p-1$ (véanse las hipótesis en el Teorema 1). Como caso particular, el problema (1) incluye, después de una normalización, al problema *logístico perturbado*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = \lambda u^{p-1} - u^q + g(u) \quad &\text{en} \quad D \\ u = 0 \quad &\text{en} \quad \partial D \, , \end{aligned} \tag{2}$$

donde $q > p-1$ y g es una función C^1 que cumple $g(u) = o(u^{p-1})$ cuando $u \to 0+$ y $g(u) = o(u^q)$ cuando $u \to +\infty$.

Usando como herramienta fundamental resultados generales sobre un problema de Cauchy singular (contenidos en los Teoremas 2.3,2.5 y 2.6 en [4], y que al parecer son nuevos en toda su generalidad), se demuestra allí el siguiente teorema (cf. [4, Teors. 3.4, 3.5]).

Teorema 1 *Supongamos que f verifica las siguientes hipótesis:*

(i) Existe $\bar{u}_0 > 0$ tal que $f(\lambda, \bar{u}_0) = 0$, para todo λ y la derivada $\partial f/\partial u$ existe y es continua en $\mathbb{R} \times [0, \bar{u}_0)$.

(ii) $\bar{u}_0$ es un cero de orden k de f en el sentido de que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\lambda, u) = (-\gamma(\lambda)k + R(\lambda, u))(\bar{u}_0 - u)^{k-1}, \tag{3}$$

para unas ciertas funciones continuas $\gamma(\lambda) > 0$ y R, cumpliéndose $R(\lambda, \bar{u}_0) = 0$ y $0 < k < p - 1$.

(iii) $\lim_{\lambda \to +\infty} \gamma(\lambda) = \bar{\gamma} > 0$ y $R(\lambda, u) \to \bar{R}(u)$ uniformemente en $[\bar{u}_0 - \delta_1, \bar{u}_0]$, para algún $\delta_1 > 0$.

(iv) $\bar{F}(u) < \bar{F}(\bar{u}_0)$ para $0 \leq u < \bar{u}_0$, donde $\bar{F}(u) = \int_0^u \bar{f}(s)ds$, y $\bar{f} = \lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda, \cdot)$.

Entonces el problema (1) admite una única familia de soluciones radiales positivas $\{u_\lambda\}$ verificando $0 < u_\lambda \leq \bar{u}_0$ y

$$\lim_{\lambda \to +\infty} u_\lambda(x) = \bar{u}_0 \tag{4}$$

uniformemente en compactos de D. Además, todas las soluciones u_λ desarrollan un núcleo muerto $\mathcal{O}_\lambda = \{x : \ u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$ para λ suficientemente grande, teniéndose la estimación exacta

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist } (\mathcal{O}_\lambda, \partial D) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int_0^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(\bar{F}(\bar{u}_0) - \bar{F}(s))^{1/p}} \ .$$

La correspondiente capa límite cerca de ∂D viene estimada de la forma:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1/p} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = -\left(p' \bar{F}(\bar{u}_0)\right)^{1/p} \ ,$$

uniformemente sobre ∂D, donde ν es la normal exterior unitaria.

Más aún, para el problema logístico perturbado (2), se demuestra que hay una única solución positiva para λ grande (cf. [4, Teor. 4.2]). Para problemas con Δ_p esto no es inmediato, ya que el célebre teorema de simetría de Gidas-Ni-Nirenberg (cf. [6]) no es válido, excepto en algunos casos particulares (véase [2] y [7]).

Finalmente, es importante destacar que cuando $D = B$, una bola de $\mathbb{R}^N$, la condición (4) es fundamental para la unicidad de soluciones para λ grande y máximo próximo a $\bar{u}_0$, pudiéndose conseguir ejemplos de no unicidad si (4) no se da.

El objetivo del presente trabajo es estudiar la unicidad de soluciones para λ grande en el caso complementario, en el que no aparecen núcleos muertos. Específicamente, estudiaremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = \lambda f(u) \quad & \text{en} \quad D \\ u = 0 \quad & \text{en} \quad \partial D \ , \end{aligned} \tag{5}$$

y supondremos que f es una función C^1 que cumple las hipótesis (H):

(i) $f(\bar{u}_0) = 0$, y $f'(u) = (-\gamma + R(u))(\bar{u}_0 - u)^{k-1}$, siendo R una función continua que verifica $R(\bar{u}_0) = 0$ y $\gamma > 0$.

(ii) $k \geq p - 1$.

(iii) $F(u) < F(\bar{u}_0)$ para todo $0 \leq u < \bar{u}_0$, donde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.

Como hipótesis técnica, supondremos a lo largo del trabajo que $p > 2$ (el caso $p = 2$ ha sido intensivamente estudiado; véase por ejemplo [12], [13]). Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 2 *Supongamos que f cumple las hipótesis (H). Entonces existen $\varepsilon > 0$, $\lambda^* > 0$ tales que el problema (5)*

$$\begin{array}{ll} -\Delta_p u = \lambda f(u) & en \quad D \\ u = 0 & en \quad \partial D \end{array}$$

admite una única solución radial positiva u_λ con $\bar{u}_0 - \varepsilon \leq \max u_\lambda < \bar{u}_0$, si $\lambda \geq \lambda^*$. Además, la familia $\{u_\lambda\}$ verifica

$$\lim_{\lambda \to +\infty} u_\lambda = \bar{u}_0$$

uniformemente sobre compactos de D. Más aún, se tiene la siguiente estimación de la capa límite cerca de ∂D:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1/p} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = -(p' F(\bar{u}_0))^{1/p} ,$$

uniformemente sobre ∂D, donde ν es la normal exterior unitaria y $F(\bar{u}_0) = \int_0^{\bar{u}_0} f(s)ds$.

Nuestro enfoque es semejante al seguido en [3]. Una de nuestras aportaciones más significativas es mostrar que, bajo condiciones adecuadas, el operador inverso de $-\Delta_p$ es diferenciable (esta circunstancia es esencial para tratar problemas de bifurcación local; véase [5]). El hecho de estar en el régimen donde no se desarrollan núcleos muertos nos permite también usar el sweeping principle (véase [11]) para conseguir estimaciones precisas de las soluciones. Finalmente, usando que el operador linealizado tiene un autovalor principal, mostramos que las soluciones son no degeneradas, y por tanto con índice local 1. Es entonces estándar concluir la unicidad de soluciones para λ grande.

En todo lo que sigue, supondremos para simplificar que D es la bola unidad B.

Diferenciabilidad de $(-\Delta_p)^{-1}$

En esta sección vamos a ver algunos resultados auxiliares, que tienen que ver con la linealización del laplaciano-p con simetría radial, y que serán fundamentales a la hora de demostrar la unicidad de soluciones.

Es bien sabido que, si $p \geq 2$, para $m > 0$ y $f \in C(\overline{B})$, existe una única solución débil de la ecuación

$$\begin{array}{ll} -\Delta_p u + mu = f & \text{en} \quad B \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial B \end{array}$$

(cf. [9]), tal que $u \in C^{1,\beta}(\overline{B})$ para algún $0 < \beta < 1$ ([8]). De hecho, se tiene la estimación

$$|u|_{1,\beta} \leq C = C(N,p,|f|_\infty) \ . \tag{6}$$

Si además f es radialmente simétrica, también lo es u, así que, identificando f y u como funciones de $r = |x|$, se verifica

$$\begin{array}{rl} - & (r^{N-1}\varphi_p(u'))' + mr^{N-1}u = r^{N-1}f(r) \quad 0 < r < 1 \\ & u'(0) = 0, \ u(1) = 0 \ , \end{array}$$

donde $' = d/dr$. De esta forma, podemos definir un operador $K_m : C[0,1] \to C^1[0,1]$ dado por $u = K_m(f)$, que es compacto en virtud de la estimación (6). Es fácil comprobar que en el caso $m = 0$, $K := K_0$ viene dado por la expresión

$$K(f)(r) = \int_r^1 \varphi_{p'}\left(\int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} f(\rho)\ d\rho\right)\ ds \ .$$

Por comodidad notacional, seguiremos llamando K_m a la restricción de estos operadores a $C^1[0,1]$.

Volviendo al problema (5), si tomamos $m > 0$ tal que $f'(u) + m > 0$ en $[0,\bar{u}_0]$, tenemos que las soluciones radiales de (5) se corresponden con los puntos fijos del problema

$$u = K_{\lambda m}(\lambda f(u) + \lambda m u) \ .$$

Denotemos $T_\lambda(u) = K_{\lambda m}(\lambda f(u) + \lambda m u)$. T_λ es un operador compacto en $C^1[0,1]$ y creciente en el intervalo $[0,\bar{u}_0]$. Nuestro primer objetivo es ver que T_λ es diferenciable en un entorno de sus puntos fijos. Para ello, resulta conveniente examinar primero la diferenciabilidad del operador K. El siguiente resultado es un caso particular del Teorema 2.1 de [5].

Teorema 3 *Supongamos que $f \in C^1[0,1]$ es tal que $f(0) \neq 0$ y $u'(r) \neq 0$ para $0 < r \leq 1$, donde $u = Kf$. Entonces K, como operador definido en $C^1[0,1]$, es diferenciable-Fréchet en f, y se tiene*

$$DK(f)g = \frac{1}{p-1}\int_r^1 \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}}\int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} g(\rho)\ d\rho\ ds \tag{7}$$

para toda $g \in C^1[0,1]$. En particular, $w = DK(f)g$ es solución de la ecuación

$$\begin{array}{rl} - & (r^{N-1}|u'|^{p-2}w')' = \frac{r^{N-1}}{p-1}g(r) \quad 0 < r < 1 \\ & w'(0) = 0\,, \ w(1) = 0\,. \end{array}$$

Además, K es C^1 en un entorno de f en $C^1[0,1]$.

Apoyándonos en este teorema, y usando el de las funciones implícitas, podemos obtener la diferenciabilidad del operador T_λ en sus puntos fijos del intervalo $[0,\bar{u}_0]$.

Teorema 4 *Sea u un punto fijo del operador T_λ en el intervalo $[0,\bar{u}_0]$, con $f(u(0)) \neq 0$. Entonces T_λ es C^1 en un entorno de u y se tiene que para toda $g \in C^1[0,1]$, $w = DT_\lambda(u)g$ es solución del problema*

$$\begin{array}{l} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}w')' + \frac{r^{N-1}}{p-1}\lambda m w = \frac{r^{N-1}}{p-1}(\lambda f'(u) + \lambda m)g \\ \ w'(0) = 0\,, \ w(1) = 0\,. \end{array}$$

Problema de autovalores

También necesitamos analizar una cuestión relativa a un problema de autovalores para DT_λ. Recordemos que el radio espectral de un operador lineal acotado L viene definido como

$$\mathrm{spr}(L) = \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{1/n}$$

(cf. [14]). Además, se tiene que $|\mu| \leq \mathrm{spr}(L)$ para todos los valores espectrales de L, en particular los posibles autovalores μ. El teorema de Krein-Rutman ([1, Teor. 3.1]) nos permite obtener el siguiente resultado:

Teorema 5 *Sea u un punto fijo de T_λ. Si $\sigma = \mathrm{spr}(DT_\lambda(u)) > 0$, entonces σ es un autovalor de $DT_\lambda(u)$ que admite una autofunción v tal que $v(r) > 0$ si $0 \leq r < 1$.*

Observación 6 No podemos concluir que σ sea el único autovalor asociado a una autofunción positiva, ya que el operador $DT_\lambda(u)$ no es fuertemente positivo, y es inaplicable el teorema 3.2 en [1].

Esbozo de la demostración del Teorema 2

Veamos que, bajo las hipótesis sobre f, podemos garantizar la existencia de una familia de soluciones con máximo próximo a $\bar{u}_0$ para λ grande.

Lema 7 *Supongamos que f cumple las hipótesis (H). Entonces existen $\eta > 0$, $\lambda_0 > 0$ tales que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, el problema (5) tiene al menos una solución positiva u_λ que verifica $\bar{u}_0 - \eta \leq \max u_\lambda < \bar{u}_0$. Además, la familia $\{u_\lambda\}$ verifica*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} u_\lambda = \bar{u}_0$$

uniformemente sobre compactos de B.

Vamos a construir a continuación una subsolución de (5) que estimará por defecto a todas las posibles soluciones positivas en el intervalo $[0, \bar{u}_0]$ para λ grande. Para ello, prolongaremos f de forma conveniente fuera de $[0, \bar{u}_0]$. Específicamente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f está acotada, $f < 0$ en $(\bar{u}_0, +\infty)$, $f = 0$ en $(-\infty, -1]$ y $F(u) < F(\bar{u}_0)$ si $-1 \leq u \leq 0$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ de forma que f sea decreciente en $[\bar{u}_0 - 2\varepsilon, \bar{u}_0]$. Disminuyendo ε si fuera necesario, podemos encontrar un valor λ_1 de λ de forma que la solución u_{λ_1} de (5) dada por el Lema 7 cumpla $u_{\lambda_1}(0) = \bar{u}_0 - \varepsilon$. Por la condición impuesta a la energía, podemos prolongar u_{λ_1} hasta que $u_{\lambda_1}(r_0) = -1$ para algún $r_0 > 1$, y $u'_{\lambda_1}(r) < 0$ si $r \in (0, r_0]$. En particular, $u_{\lambda_1}(r) < 0$ si $r > 1$. Con esta función vamos a construir una subsolución del problema (5).

Lema 8 *Sea u_{λ_1} como antes y definamos*

$$z_\lambda(r) = u_{\lambda_1}\left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{1/p} r\right) .$$

Entonces z_λ es subsolución de (5) para $\lambda \geq \lambda_1$.

La existencia de esta subsolución es fundamental. De hecho, para λ suficientemente grande, todas las soluciones radiales positivas con máximo mayor o igual que $\bar{u}_0 - \varepsilon$ están por encima de ella. El sweeping principle nos permite concluir que

Lema 9 *Existe $\bar{\lambda} \geq \lambda_0$ tal que todas las soluciones radiales positivas u de (5) con $\lambda \geq \bar{\lambda}$ y $\bar{u}_0 - \varepsilon \leq \max u < \bar{u}_0$ verifican $u \geq z_\lambda$. Además, existe $\Lambda > 0$ tal que $u(r) \geq \bar{u}_0 - 2\varepsilon$ si $0 \leq r \leq 1 - \Lambda\lambda^{-1/p}$.*

Observación 10 Esta situación contrasta con el caso singular $0 < k < p - 1$. En el presente caso, la hipótesis (iii) basta para que toda familia de soluciones $\{u_\lambda\}$ tal que $\lim_{\lambda\to+\infty} \max u_\lambda = \bar{u}_0$ cumpla $\lim_{\lambda\to+\infty} u_\lambda = \bar{u}_0$ uniformemente sobre compactos de B.

Como consecuencia del Lema 9, todas las soluciones radiales positivas de (5) con λ grande y máximo próximo a $\bar{u}_0$ están en el intervalo ordenado $[z_\lambda, \bar{u}_0]$. Como además el operador T_λ definido anteriormente es creciente, $z_\lambda \leq T_\lambda(z_\lambda)$ y $T_\lambda(\bar{u}_0) \leq \bar{u}_0$, resulta entonces que T_λ aplica el intervalo $[z_\lambda, \bar{u}_0]$ en sí mismo.

Nótese además que T_λ es compacto, y no deja fijos los extremos del intervalo. Es por ello que el grado de Leray-Schauder de $I - T_\lambda$ está bien definido (véase [10]). Lo denotaremos por $d(I - T_\lambda, (z_\lambda, \bar{u}_0), 0)$. El índice de una solución u será denotado, como es usual, por $i(I - T_\lambda, u, 0)$

Puesto que $(z_\lambda, \bar{u}_0)$ es un conjunto convexo, tenemos que

$$d(I - T_\lambda, (z_\lambda, \bar{u}_0), 0) = 1 \ .$$

(cf. [1]). Veamos que, cuando λ es suficientemente grande, todos los puntos fijos de T_λ en el intervalo $[z_\lambda, \bar{u}_0]$ son aislados y de índice 1.

Teorema 11 *Existe $\lambda^* \geq \bar{\lambda}$ tal que para $\lambda \geq \lambda^*$ todos los puntos fijos u de T_λ en el intervalo $[z_\lambda, \bar{u}_0]$ son aislados y se tiene $i(I - T_\lambda, u, 0) = 1$.*

La demostración de este teorema se basa en que $\mathrm{spr}(DT_\lambda(u)) < 1$ para λ grande y u punto fijo de T_λ, usando un argumento de blow-up (véase [11]). Para ello es esencial el Teorema 5

Como consecuencia de los resultados anteriores, T_λ tiene, para λ grande, un único punto fijo u_λ en $[z_\lambda, \bar{u}_0]$. En conclusión, (5) tiene una única solución radial positiva u_λ con máximo próximo a $\bar{u}_0$ cuando λ es suficientemente grande.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de la DGES PB96-0621.

Referencias

[1] H. Amann, “Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces”, *SIAM Review*, **18** (1976), 620-709.

[2] M. Badiale, E. Nabana, "A note on radiality of solutions of p-Laplacian equation", *Appl. Anal.* **52** (1994), 35-43.

[3] P. Clément, G. Sweers G, "Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) **14** (1987), 97-121.

[4] J. García Melián, J. Sabina de Lis, "Uniqueness to quasilinear problems for the p-Laplacian in radially symmetric domains", *por aparecer en Nonlinear Analysis* (1999).

[5] J. García Melián, J. Sabina de Lis, "A local bifurcation theorem for degenerate elliptic equations with radial symmetry", *preprint.*

[6] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, "Symmetry and related properties via the maximum principle", *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209-243.

[7] S. Kesavan, F. Pacella, "Symmetry of positive solutions of a quasilinear elliptic equation via isoperimetric inequalitites", *Appl. Anal.* **54** (1994), 27-37.

[8] G. Lieberman, "Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations", *Nonlinear Anal.* **12** (1988), 1203-1219.

[9] J. L. Lions, *Quelques méthodes des résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villiars, 1969.

[10] P. H. Rabinowitz, *Théorie du degré topologique et applications à des problemes aux limites non linéaires*, Paris VI et CNRS, 1975.

[11] J. Serrin, *Nonlinear equations of second order*, A. M. S. Sympos. Partial Differential Equations, Berkeley, Agosto 1971.

[12] J. Smoller, A. Wasserman, "An existence theorem for positive solutions of semilinear elliptic equations", *Arch. Rational Mech. Anal.* **95** (1986), 211-216.

[13] J. Smoller, A. Wasserman, "On the monotonicity of the Time-Map", *J. Differential Equations* **77** (1989), 287-303.

[14] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer Verlag Berlin, 1965.

1. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
38271 La Laguna. TENERIFE.