CAPAS LÍMITE, NÚCLEOS MUERTOS Y PRINCIPIO DE COMPARACIÓN EN PROBLEMAS DE DIFUSIÓN NO LINEAL

J. García Melián y J. Sabina de Lis

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna
38271-La Laguna (Tenerife)

El objetivo de esta comunicación es presentar dos tipos de resultados que involucran al operador p-laplaciano, definido, para $p > 1$, como

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \qquad u \in W^{1,p}(\Omega),$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$. En primer lugar, estudiaremos el comportamiento de las soluciones positivas de ecuaciones de la forma

$$\begin{array}{ll} -\Delta_p u = \lambda f(u) & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{array}$$

cuando $\lambda \to +\infty$. Concretamente, nos interesa analizar el fenómeno de homogeneización de soluciones hacia un valor $u_0 > 0$ tal que $f(u_0) = 0$ (véanse las hipótesis sobre f más adelante), y la correspondiente capa límite que se genera cerca de $\partial\Omega$, debido a la condición de contorno. La homogeneización en el caso semilineal ($p = 2$, $\Delta_p \equiv \Delta$) ha sido descrita en diversos trabajos ([2], [7] por citar algunos). Nuestro objetivo es presentar una generalización al caso $p \neq 2$ de los resultados en [7] que constituyen el núcleo de [10]. Una primera versión parcial de los mismos fue divulgada en [8].

En la segunda parte, presentamos una caracterización del principio de comparación débil para operadores de la forma

$$\mathcal{L}_p u = -\Delta_p u + f(x, u),$$

siendo f una función de Carathéodory con un crecimiento conveniente. En el importante caso particular $f(x, u) = a(x)|u|^{p-2}u$, con $a \in L^\infty(\Omega)$, estableceremos además diversas caracterizaciones del principio del máximo para el operador $\mathcal{L}_p$. Es bien conocido que $\mathcal{L}_p$ satisface el principio de comparación débil si f es no decreciente (cf. [13]). La mayor conclusión obtenida es que tal condición es esencialmente necesaria si $p \neq 2$. Eliminaremos además algunas restricciones sobre el crecimiento de f y la regularidad de las funciones involucradas, que se exigían de una forma natural en el trabajo preliminar [9].

Estudio de capas límite y núcleos muertos

Esta primera parte se ocupará del estudio del comportamiento de las soluciones positivas (débiles) de la ecuación

$$\begin{array}{ll} -\Delta_p u = \lambda f(u) & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{array} \tag{1}$$

cuando $\lambda \to +\infty$. En todo lo que sigue, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$ para algún $\alpha \in (0,1)$, y f es una función C^1 verificando las siguientes hipótesis:

i) $\frac{f(u)}{u^{p-1}}$ es decreciente.
ii) $\lim_{u\to 0+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = m > 0$
iii) f tiene un cero (único) u_0 de orden $k \geq 1$, es decir

$$f(u) \approx C_0(u_0 - u)^k, \quad u \to u_0-$$

con $C_0 > 0$.

Si f satisface las hipótesis anteriores, se tiene como consecuencia, por ejemplo, de los teoremas 1 y 2 en [4], que para cada $\lambda > \lambda_{1,p}/m$ existe una única solución positiva de (**??**). Aquí, $\lambda_{1,p}$ denota al primer autovalor de $-\Delta_p$ en Ω con condiciones Dirichlet sobre $\partial\Omega$ (cf. [1]). Además, los resultados de Tolksdorf en [13] permiten asegurar que $u_\lambda \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\gamma}(\{x : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon\})$, para ciertos $\beta, \gamma \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$. Por otro lado, puede demostrarse que u_λ es continua y creciente respecto a λ, y verifica $0 < u_\lambda \leq u_0$ ([10]).

Si $p = 2$, el caso semilineal ($\Delta_p \equiv \Delta$), problemas análogos a (**??**) han sido estudiados por muchos autores. Recientemente, en [7] se analizó la ecuación logística

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda(mu - u^{q+1}) \quad &\text{en} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

y perturbaciones adecuadas de ésta. Se demostró que en este caso las soluciones tienden a u_0 uniformemente sobre compactos de Ω cuando $\lambda \to +\infty$, fenómeno que llamaremos "homogeneización" en el presente contexto. Esto, junto con la condición de contorno, conlleva que

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} \to -\infty, \quad \text{en } \partial\Omega$$

(ν la normal exterior unitaria), es decir, se forma una capa límite cerca de la frontera. En [7] se estudió con precisión el espesor de la capa límite en dominios convexos. Nuestro objetivo es estudiar ese espesor en el caso $p \neq 2$, y además en dominios no convexos.

Un fenómeno adicional que aparece como consecuencia de la degeneración del p-laplaciano es la existencia de "núcleos muertos" (también "núcleos planos"). Más concretamente, si $k \geq p - 1$, entonces es consecuencia del principio fuerte del máximo en [14] que $0 < u_\lambda < u_0$. Sin embargo, si $k < p - 1$ (y por tanto $p > 2$), podría ocurrir que el conjunto $\mathcal{O}_\lambda = \{x : \ u_\lambda(x) = u_0\}$ (el núcleo muerto) fuera no vacío. En tal caso, nos interesaría ver cuál es el comportamiento de $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega)$ cuando $\lambda \to +\infty$.

La respuesta óptima a las cuestiones anteriores está contenida en el siguiente teorema. Los resultados de homogeneización y capa límite fueron descritos primeramente en [8] en el caso convexo y luego mejorados y complementados con las estimaciones para el núcleo muerto en [10].

Teorema 1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, y f verificando las hipótesis anteriores. Para $\lambda > \lambda_{1,p}/m$, sea u_λ la única solución positiva de*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) \quad &\textit{en} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad &\textit{en} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Entonces

a) u_λ tiende a u_0 cuando $\lambda \to +\infty$, uniformemente sobre compactos de Ω.

b) Si $F(z) = \int_0^z f(s)ds$, se tiene

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1/p}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x) = -\left(\frac{p}{p-1}F(u_0)\right)^{1/p} \tag{3}$$

uniformemente sobre $\partial\Omega$.

c) Si $k < p-1$, existe $\lambda^* > \lambda_{1,p}/m$ tal que si $\lambda > \lambda^*$, el conjunto $\mathcal{O}_\lambda = \{x : \ u_\lambda(x) = u_0\}$ es no vacío. Además

$$\frac{C(p,f)}{L_\Omega^p} \leq \lambda^* \leq \frac{C(p,f)}{(2R_\Omega)^p}C_\gamma^p, \tag{4}$$

donde

$$C(p,f) = \frac{p-1}{p}\left(\int_0^{u_0} \frac{2ds}{(F(u_0)-F(s))^{1/p}}\right)^p$$

$$C_\gamma = \begin{cases} \gamma^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, & p \neq N \\ e, & p = N \end{cases}$$

y $\gamma = (N-1)/(p-1)$. L_Ω es la mínima distancia entre hiperplanos paralelos conteniendo Ω, y R_Ω es el radio de la mayor bola contenida en Ω. Finalmente,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1/p}\mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) = \frac{1}{2}C(p,f)^{1/p}. \tag{5}$$

Observaciones. 1. La existencia de núcleos muertos para ecuaciones de este tipo fue demostrada en [11], pero no se obtiene allí ninguna información sobre λ^*, ni la estimación exacta (**??**).

2. Los resultados de homogeneización y capa límite anteriores son válidos además para perturbaciones adecuadas de la ecuación (**??**). Por ejemplo, considerando $g \in C^1$ tal que $g(u) = o(u^{p-1})$, $u \to 0+$, $g(u) = o(f(u))$, $u \to +\infty$, *todas* las soluciones de la ecuación

$$\begin{array}{rll} -\Delta_p u = \lambda f(u) + g(u) & \text{en} & \Omega \\ u = 0 & \text{en} & \partial\Omega \end{array} \tag{6}$$

verifican las conclusiones de los apartados a) y b) del teorema anterior (cf. [10]).

Principios del máximo y de comparación

A continuación vamos a presentar algunos resultados, parcialmente recogidos en [9] que caracterizan el principio de comparación débil para operadores $\mathcal{L}_p$ en los que Δ_p aparece en la forma siguiente

$$\mathcal{L}_p u = -\Delta_p u + f(x,u), \tag{7}$$

donde f es una función de Carathéodory “sublineal”, en el sentido de que $|f(x,u)| \leq C(|u|^{p-1}+1)$, $\forall u \in \mathbb{R}$, con $C > 0$. En particular, dedicaremos especial atención al caso

$$L_p u = -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u, \tag{8}$$

con $a \in L^\infty(\Omega)$.

Por principio de comparación débil entenderemos lo habitual. A saber: si $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ verifican

$$\begin{array}{rll} \mathcal{L}_p u \leq \mathcal{L}_p v & \text{en} & \Omega \\ u \leq v & \text{en} & \partial\Omega, \end{array} \tag{9}$$

entonces $u \leq v$ en Ω. La primera desigualdad en (??) debe entenderse en $W^{-1,p'}(\Omega)$, y la segunda en el sentido de las trazas.

Recapitulemos algunos resultados conocidos (cf. [12] y sus referencias) para operadores uniformemente elípticos

$$(L_0 + a(x))u = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\partial_i u + a(x)u \tag{10}$$

y coeficientes, por ejemplo, en $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Debido a la linealidad, los principios de comparación (débil y fuerte) son equivalentes a los principios del máximo (débil y fuerte), y cada uno de ellos es equivalente a su vez a las tres condiciones siguientes:

i) $\lambda_1(L_0 + a(x)) > 0$.

ii) Existe $\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ supersolución positiva estricta, es decir,

$$\begin{array}{rll} (L_0 + a(x))\phi \geq 0 & \text{en} & \Omega \\ \phi \geq 0 & \text{en} & \partial\Omega, \end{array}$$

y una de las dos desigualdades estricta.

iii) El operador $(L_0 + a(x))^{-1} : C^\alpha(\overline{\Omega}) \to C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}), (\gamma < \alpha)$ existe, es compacto y fuertemente positivo.

Obviamente, el principio de comparación implica el principio del máximo, y es por ello natural efectuar un estudio preliminar del principio del máximo para el operador L_p. En este sentido, los resultados anteriores se extienden al mismo en los términos que pasamos a detallar. En primer lugar, las ideas en [5] permiten establecer la equivalencia entre las propiedades:

i) L_p verifica el principio del máximo.

ii) $\lambda_{1,p}(L_p) > 0$.

Señalemos que no es difícil probar (cf. [9]) que L_p admite un único autovalor principal que goza de las mismas propiedades que en el caso $a = 0$ (véase [1]). Podemos así establecer las siguientes propiedades que caracterizan el principio del máximo:

iii) Existe $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$, supersolución positiva estricta, es decir,

$$\begin{array}{rll} L_p\phi \geq 0 & \text{en} & \Omega \\ \phi \geq 0 & \text{en} & \partial\Omega, \end{array}$$

con una de las desigualdades estricta.

iv) El operador $L_p^{-1} : W_+^{-1,p'}(\Omega) \to W_{0,+}^{1,p}(\Omega)$ está bien definido, donde $W_+^{-1,p'}(\Omega)$ y $W_{0,+}^{1,p}(\Omega)$ denotan los conos positivos de $W^{-1,p'}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}$, respectivamente.

Observación. Debe subrayarse que la equivalencia i)-iv) fue probada en [9] bajo condiciones de regularidad más restrictivas. En efecto, se impone al dominio de L_p la condición $L_p u \in L^\infty(\Omega)$. La regularidad ganada en u permite además probar, usando los resultados en [14], que los principios débil y fuerte del máximo son equivalentes. Por consiguiente, a los efectos de regularidad, la versión que aquí presentamos constituye una mejora sustancial de tales resultados.

Sin embargo, la no linealidad de L_p cuando $p \neq 2$ no permite concluir la validez del principio de comparación débil a partir de la del principio del máximo. En este orden de ideas, nótese que el principio de comparación y la invertibilidad completa de L_p son equivalentes, y que en iv) se garantiza solamente una invertibilidad parcial.

Por otra parte, es bien conocido que una condición suficiente, debida a Tolksdorf, para la validez del principio de comparación débil para el operador $\mathcal{L}_p$ es que la función f sea no decreciente en u (cf. [13]). En algún sentido, este resultado es "moralmente" óptimo. En efecto, se tiene el siguiente

Teorema 2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y regular, y $f(x,u)$ una función C^1 sublineal, es decir, $|f(x,u)| \leq C(|u|^{p-1}+1)$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Si existe $u_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\left|\left\{x : \frac{\partial f}{\partial u}(x,u_0) < 0\right\}\right| > 0$$

($|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue), entonces el principio de comparación débil para $\mathcal{L}_p$ no es válido para $p \neq 2$.

El teorema 2 supone una mejora considerable del correspondiente resultado recogido en [9] (cf. teorema 7). En efecto, por un lado, se relaja el comportamiento de f en el infinito. Por otro, se extiende la validez del resultado del rango $p > 2$ a $p > 1$, $p \neq 2$. De hecho, para $p > 2$, e inspirándonos en [3] (donde $N = 1$, $f(x,u) = -a|u|^{p-2}u$, $a = cte.$, $0 < a < \lambda_{1,p}$), la prueba del teorema se basa en la construcción de $h \in C(\overline{\Omega})$ tal que el problema

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p u = h \quad &\text{en} \quad \Omega \\ u = 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{11}$$

tenga dos soluciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$. El resultado de [3] se ha extendido recientemente (bajo las mismas hipótesis) al caso $1 < p < 2$ en [6], y una adaptación de tales ideas permite, cuando $u_0 = 0$, hallar $h \in C(\overline{\Omega})$ como antes. Finalmente, si $u_0 \neq 0$, la estrategia de [6] no es aplicable, mientras que usando otro género de ideas se puede conseguir $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$ para que (**??**) tenga dos soluciones.

Como consecuencia de todo lo anterior, tenemos la siguiente elegante caracterización del principio de comparación débil para el operador L_p.

Corolario. *Si $p \neq 2$, la condición necesaria y suficiente para que el operador $L_p u = -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u$, $a \in L^\infty(\Omega)$, verifique el principio de comparación débil es que $a(x) \geq 0$ para c. t. $x \in \Omega$.*

Observación. Es conveniente resaltar que el correspondiente corolario en [9] es válido sólo cuando $p > 2$, constituyendo la presente versión una extensión al rango $1 < p < 2$.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la DGICYT, con el contrato PB 930465.

Bibliografía

[1] A. Anane, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-Laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **305** (1987), 725-728.

[2] S.B. Angenent, *Uniqueness of the solution of a semilinear boundary value problem*, Math. Ann. **272** (1985), 129-138.

[3] M. Del Pino, M. Elgueta, R. Manásevich, *A homotopic deformation along p of a Leray-Schauder degree result and existence for* $(|u'|^{p-2}u')' + f(t,u) = 0,\ u(0) = u(T) = 0,\ p > 1$, J. Diff. Eqns. **80** (1989), 1-13.

[4] J.I. Díaz, J.E. Saa, *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **305**, Série I (1987), 521-524.

[5] J. Fléckinger, J. Hernández, F. de Thélin, *On maximum principles and the existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems*, Diff. Int. Eqns. **7** (1994), 383-398.

[6] J. Fléckinger, J. Hernández, P. Takáč, F. de Thélin, *Uniqueness and positivity for solutions of equations with the p-Laplacian*, En Reaction Diffusion Systems (Eds. G. Caristi y E. Mitidieri). Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **194**. Marcel Dekker (1997), por aparecer.

[7] J. Fraile, J. López-Gómez, J. Sabina de Lis, *On the global structure of the set of positive solutions of some semilinear elliptic equations*, J. Diff. Eqns. **123** (1995), 180-212.

[8] J. García-Melián, J. Sabina de Lis, *The behaviour of stationary solutions to some nonlinear diffusion problems*, En Proc. 2nd. World Congress of Nonlinear Analysts, Atenas 1996. Elsevier (1997), por aparecer.

[9] J. García-Melián, J. Sabina de Lis, *Maximum and comparison principles for operators involving the p-Laplacian*, J. Math. Anal. Appl. (1997), por aparecer.

[10] J. García-Melián, J. Sabina de Lis, *Stationary patterns for degenerate equations when a parameter is large*, preprint.

[11] S. Kamin, L. Véron, *Flat core properties associated to the p-Laplace operator*, Proc. A.M.S. **118** (1993), 1079-1085.

[12] J. López-Gómez, *The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems*, J. Diff. Eqns. **127** (1995), 263-294.

[13] P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. P.D.E. **8** (1983), 773-817.

[14] J.L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), 191-202.