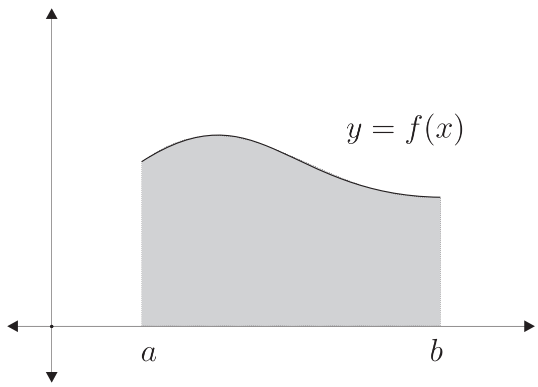
TEMA 4. Cálculo integral

En este tema consideraremos el cálculo integral, que es un complemento natural del cálculo diferencial y tiene múltiples aplicaciones en otras ciencias.

4.1. Introducción al cálculo integral

El cálculo integral se originó para dar solución al problema del cálculo de áreas. Específicamente, consideremos la gráfica de una función $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. El problema que nos planteamos es calcular el área comprendida entre la curva y el eje de las X:



Este área se llama la integral de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Sorprendentemente, este problema está relacionado con el cálculo diferencial, a través de la llamada *regla de Barrow.* Para enunciarla, necesitamos el importante concepto de *primitiva* de una función: llamaremos primitiva de la función $f(x)$ a cualquier función derivable $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Regla de Barrow
Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$. Si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

En la práctica, existe una notación cómoda a la hora de aplicar la regla de Barrow. Ésta se basa en que primero se calcula la primitiva y luego se sustituyen los límites de integración. Se expresa de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Queda claro entonces que para el cálculo de áreas es importante desarrollar métodos que nos permitan el cálculo de primitivas de funciones. Ése será el objetivo de las siguientes secciones.

4.2. Cálculo de primitivas

Llamaremos *primitiva* de la función $f(x)$ a cualquier función derivable $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Una primera regla básica es que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(x) + C$ también lo es para cualquier $C \in \mathbb{R}$. De hecho, éstas son todas las primitivas de la función $f(x)$. Al conjunto de todas las primitivas de la función $f(x)$ se le llama *integral indefinida* de $f(x)$ y se denota por

$$\int f(x)dx.$$

Observemos que dx es simplemente una notación que nos indica cuál es la variable respecto a la cual se efectúa la integración. Según lo anterior, tenemos:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

donde $F(x)$ es tal que $F'(x) = f(x)$.

Teniendo en cuenta las tablas de derivadas, podemos obtener inmediatamente las primitivas de algunas funciones elementales:

$$\begin{aligned}
&\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)\\
&\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C\\
&\int e^x dx = e^x + C\\
&\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C\\
&\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C\\
&\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C\ .
\end{aligned} \tag{1}$$

No obstante, cuando la función a integrar es más complicada, no hay formas sencillas de determinar una primitiva. Por ello se desarrollan las técnicas de integración, que nos permiten, dependiendo del tipo de función a integrar, aplicar un procedimiento determinado para obtener una primitiva.

Veamos en primer lugar algunas propiedades básicas de la integral indefinida.

Propiedades Para la integral indefinida tenemos:

(a) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k \in \mathbb{R}$;

(b) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

Pero es importante destacar que no hay reglas para la integral de un producto o de un cociente de funciones.

Ejemplo 1. Usando las reglas anteriores y las integrales inmediatas (1), tenemos:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 3x + 5)dx &= \int x^2 dx - 3\int x dx + 5\int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C,\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\int (e^x - \cos x + 5 \operatorname{sen} x)dx &= \int e^x dx - \int \cos x dx + 5\int \operatorname{sen} x dx \\ &= e^x - \operatorname{sen} x - 5\cos x + C.\end{aligned}$$

Siempre es recomendable, al calcular una integral, comprobar el resultado que hemos obtenido. Para ello, hemos de verificar que la derivada de éste coincide con el integrando.

4.3. Cambio de variable en una integral indefinida

Una de las técnicas mas fructíferas a la hora de calcular integrales indefinidas es el llamado cambio de variable. Se aplica a integrales de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

El objetivo es introducir una nueva variable, de forma que la integral resultante sea un poco más sencilla de calcular.

En la integral anterior, hacemos el cambio de variable $t = g(x)$. En la nueva integral, la expresión dt está relacionada con dx de la siguiente forma:

$$dt = g'(x)dx.$$

Así, la integral original se transforma en

$$\int f(t)dt$$

que debería ser más sencilla de resolver.

Ejemplo 2. (a) Para la integral:

$$\int e^{3x}dx$$

hacemos el cambio $u = 3x$, con lo que $du = 3dx$, y por tanto:

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{u}du = \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

(b) Consideremos:

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = \int x(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Haciendo $u = 2x + 1$, tenemos $du = 2dx$ y también $x = \frac{1}{2}(u-1)$, con lo que

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x+1}dx &= \frac{1}{2}\int 2x(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4}\int (u-1)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{4}\int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})du \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C\ .\end{aligned}$$

(c) Una integral con funciones trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x dx.$$

Haciendo $u = \operatorname{sen} 3x$, tenemos $du = 3\cos 3x dx$, con lo que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x dx &= \frac{1}{3}\int 3\operatorname{sen}^2 3x \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int u^2 du \\ &= \frac{1}{9}u^3 + C = \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C.\end{aligned}$$

4.4. Integración por partes

Veremos a continuación otra técnica de integración conocida como integración por partes. Es particularmente útil cuando los integrandos son productos de funciones algebraicas y trascendentes. Se basa en la fórmula para la derivada de un producto:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

de la cual obtenemos

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

La forma habitual de escribir esta regla es la siguiente:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

donde u y v son funciones de x. La clave está en escoger adecuadamente las funciones u y v para que la segunda integral sea más sencilla que la primera.

Ejemplo 3. (a) Calculemos por partes la integral:

$$\int x \cos x dx.$$

Hagamos $u = x$, $dv = \cos x dx$, con lo que $du = dx$, $v = \operatorname{sen} x$. Entonces:

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

(b) Hay situaciones en las que la integración por partes también es útil, a pesar de no haber un producto de funciones en el integrando. Por ejemplo:

$$\int \ln x dx.$$

Haciendo $u = \ln x$, $dv = dx$, tenemos $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ y por tanto:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \ .$$

(c) En algunos casos es necesario integrar por partes más de una vez. Un ejemplo típico es la integral:

$$\int x^2 e^x dx.$$

Haciendo $u = x^2$, $dv = e^x dx$, tenemos $du = 2x dx$, $v = e^x$, con lo que

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

En esta última integral hacemos $u = x$, $dv = e^x dx$, $du = dx$, $v = e^x$, para obtener

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x \right) + C \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2) e^x + C \ .\end{aligned}$$

A la hora de efectuar una integración por partes, lo que resulta fundamental es elegir qué parte vamos a derivar y qué parte vamos a integrar. Resulta útil recordar el siguiente orden para la elección de u: logaritmos, polinomios, exponencial, trigonométricas (LPET).

4.5. Integración de funciones racionales

En esta sección consideraremos un tipo importante de funciones a la hora de integrar: las *funciones racionales*. Es decir, nos ocuparemos de integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Por supuesto, el caso interesante es cuando $Q(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que uno, porque si no se trataría de la integral de un polinomio.

Algunas integrales racionales son inmediatas, como las siguientes

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C \\ &\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2) \\ &\int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arc\,tg} x + C. \end{aligned} \tag{2}$$

La integración de funciones racionales se basa en descomponer el cociente $P(x)/Q(x)$ en suma de funciones más sencillas, de forma que las integrales correspondientes sean esencialmente de uno de los tipos anteriores.

En el caso en que el grado de $P(x)$ sea mayor o igual que el de $Q(x)$, el primer paso a seguir es efectuar la división entre los polinomios. Esto proporciona:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)S(x) + R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $S(x)$, $R(x)$ son polinomios (cociente y resto de la división, respectivamente) y $R(x)$ es de grado menor que $Q(x)$.

Podemos suponer entonces que el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$. El siguiente paso es descomponer $Q(x)$ en factores de primer y segundo grado, de acuerdo a sus raíces. Tendremos que distinguir varios casos, dependiendo de las raíces de $Q(x)$. Solo veremos dos posibilidades, cuando $Q(x)$ tiene exclusivamente raíces reales.

(a) Las raíces de $Q(x)$ son reales y simples

Si $a_1, \ldots, a_n$ son las raíces de $Q(x)$, hacemos una descomposición de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

donde $A_1, \ldots, A_n$ son constantes desconocidas que tenemos que calcular. Una vez conocidas las constantes, todas las integrales son de tipo logarítmico, como la primera en (2). Observemos que para calcular los coeficientes tenemos que sumar todas las fracciones de la expresión anterior e igualar el resultado a $P(x)/Q(x)$.

Ejemplo 4. Para calcular la integral

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx,$$

en primer lugar hallamos las raíces del denominador: son $x = 2$ y $x = 3$. Por tanto, para éste tenemos la descomposición $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Escribimos:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Para calcular los coeficientes, hacemos la suma del segundo miembro:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)},$$

y llegamos, igualando los denominadores, a $1 = A(x-3)+B(x-2)$. Damos a x los valores de las raíces para obtener que $A = -1$, $B = 1$. Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-5x+6}dx &= -\int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{1}{x-3}dx \\ &= -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(b) Las raíces de } Q(x) \text{ son reales, algunas múltiples}}$

Supongamos por simplificar que $a_1, \dots, a_n$ son las raíces simples y b es una raíz múltiple, con multiplicidad $m \geq 2$. Hacemos una descomposición de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_m}{(x-b)^m}.$$

Después de calcular los coeficientes, tenemos integrales de los dos primeros tipos en (2).

Ejemplo 5. El denominador de la integral:

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$$

tiene dos raíces, $x = 0$ (simple) y $x = -1$ (doble). Es decir, $x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$. Luego tenemos la descomposición

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x^3+2x^2+x}.$$

Igualando denominadores, tenemos $5x^2+20x+6 = A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$. Como antes, dando a x los valores de las raíces $x = 0$ y $x = -1$, obtenemos $A = 6$, $C = 9$. Dando cualquier otro valor a x, por ejemplo, $x = 1$, obtenemos $31 = 4A + 2B + C$, de donde $2B = 31 - 24 - 9 = -2$, es decir, $B = -1$. Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx &= 6\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx + 9\int \frac{1}{(x+1)^2}dx \\ &= 6\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C. \end{aligned}$$

4.6. Aplicaciones de la integral al cálculo de áreas y volúmenes

Veamos algunas aplicaciones de la integral definida, que tienen que ver con el cálculo de áreas, volúmenes de sólidos de revolución y longitud de curvas.

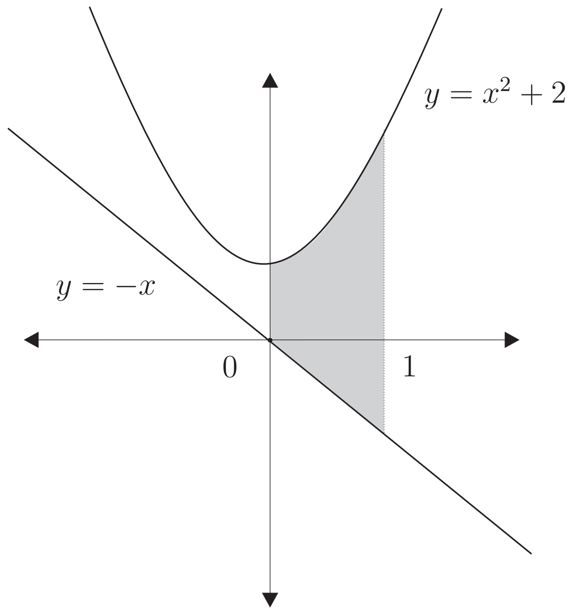
Área de una región entre dos curvas

Supongamos que tenemos dos curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ con $x \in [a, b]$, de forma que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$. El área comprendida entre las curvas es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Si tenemos las dos curvas, pero no sabemos si se da la desigualdad $f(x) \geq g(x)$ en algún intervalo, tendremos que calcular los puntos de corte para, a partir de ellos, deducir en qué intervalos se da $f(x) \geq g(x)$ y en cuáles la desigualdad contraria.

Ejemplo 6. (a) Hallar el área de la región acotada por las gráficas $y = x^2 + 2$, $y = -x$ en $[0, 1]$:

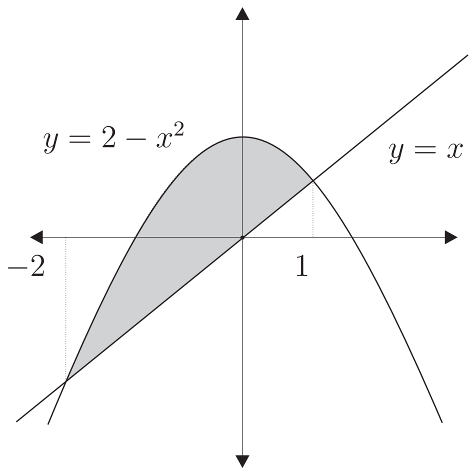


Puesto que $x^2 + 2 \geq -x$ en $[0, 1]$, el área pedida es

$$A = \int_0^1 (x^2 + 2 - (-x))dx = \int_0^1 (x^2 + x + 2)dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}.$$

(b) En algunos casos no nos dan el intervalo, sino que se trata de hallar el área de la región delimitada por dos curvas que se cortan. En tal caso hay que hallar los puntos de corte.

Por ejemplo, vamos a calcular el área comprendida entre las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$. Los puntos de corte son las soluciones de la ecuación $2 - x^2 = x$, es decir, $x^2 + x - 2 = 0$, que son $x = -2$ y $x = 1$.

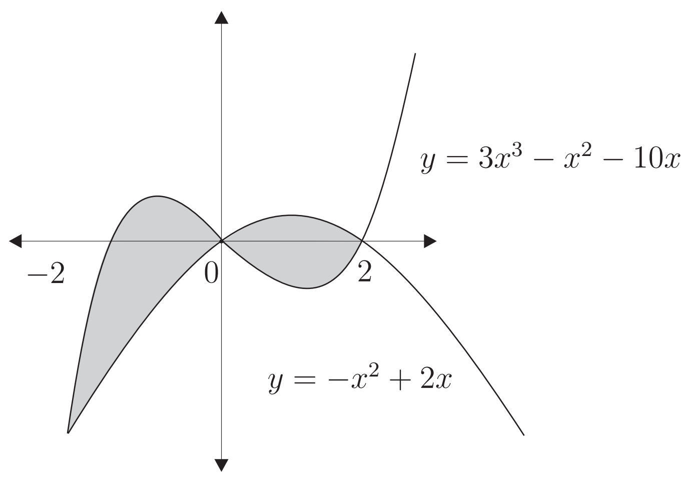


Luego el área pedida es

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

(c) Puede ocurrir que haya más de dos puntos de corte. En tal caso hay que determinar la posición relativa entre ambas gráficas en cada uno de los intervalos.

Como ejemplo, tomemos $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$, $g(x) = -x^2 + 2x$. Los puntos de corte son las soluciones de $3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$, es decir, $3x^3 - 12x = 0$, que son $x = 0$, $x = \pm 2$.

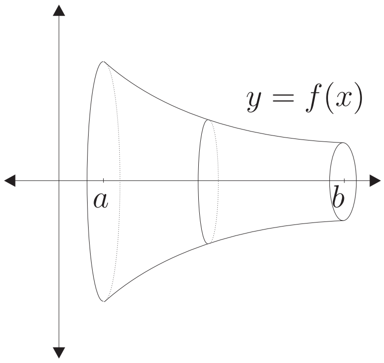


Así que el área pedida es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx + \int_{0}^{2} (12x - 3x^3)dx \\ &= \left(\frac{3}{4}x^4 - 6x^2\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(6x^2 - \frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{2} = 24. \end{aligned}$$

Volumen de un sólido de revolución

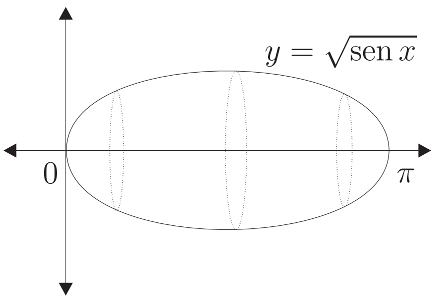
Si tenemos la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ y la hacemos girar alrededor del eje OX, obtenemos un sólido tridimensional. El volumen de éste se puede calcular usando integrales definidas, mediante el llamado método de los discos.



El volumen viene dado por

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Ejemplo 7. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el eje OX, alrededor del eje OX, con $0 \leq x \leq \pi$.



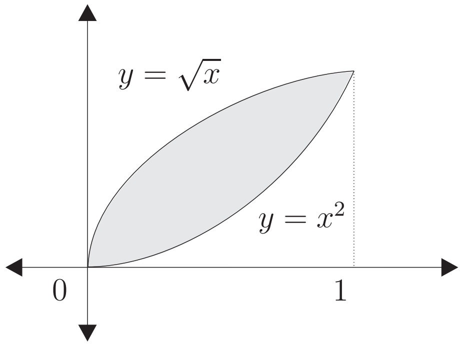
El volumen pedido es

$$V = \pi \int_0^\pi (\sqrt{\operatorname{sen} x})^2 dx = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = -\pi \cos x \Big|_0^\pi = 2\pi.$$

Si lo que hacemos girar alrededor del eje OX es la región comprendida entre dos curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, donde $f(x) \geq g(x)$, el volumen del sólido obtenido es

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

Ejemplo 8. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ alrededor del eje OX.



Calculemos los puntos de corte entre ambas gráficas para ver cuál es la región que gira alrededor del eje OX. Tenemos $\sqrt{x} = x^2$ cuando $x = x^4$, es decir, si $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto el volumen pedido es

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10}.$$

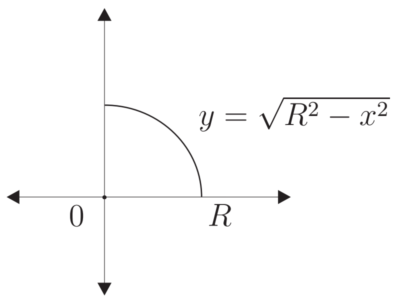
Longitud de un arco de curva

Si tenemos un arco de una curva, dada por la expresión $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, podemos calcular su longitud con integrales definidas. Ésta será

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Ejemplo 9. Hallar la fórmula para la longitud de una circunferencia de radio R.

Tomemos la curva $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq R$. La longitud pedida es cuatro veces la de esta curva.



Si $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, tenemos

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

y entonces

$$L = 4\int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx = 4R\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$$

Para calcular la primitiva de esta última función, hacemos el cambio de variable $x = Rt$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = \int \frac{R}{\sqrt{R^2-R^2t^2}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \text{arcsen}t = \text{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right).$$

Así que, usando la regla de Barrow:

$$L = 4R\ \text{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right)\Big|_0^R = 2\pi R,$$

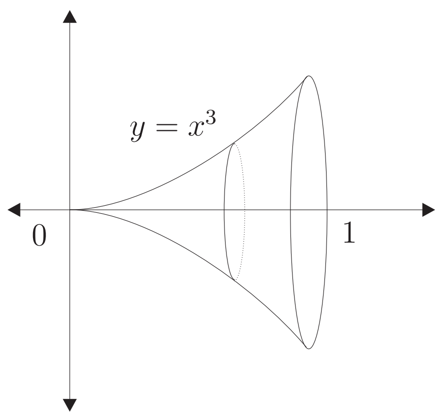
que concuerda con la conocida fórmula de la longitud de una circunferencia.

Superficies de revolución

Mediante el uso de integrales se puede también calcular el área de una superficie de revolución. Supongamos que la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ se hace girar alrededor del eje OX, obteniéndose una superficie. El área de esta superficie viene dada por

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Ejemplo 10. Hallar el área de la superficie obtenida al hacer girar la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ alrededor del eje OX.



Tendremos:

$$A = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}dx = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx.$$

Para calcular la primitiva de la función $x^3\sqrt{1+9x^4}$ hacemos el cambio de variable $t = 1 + 9x^4$, $dt = 36x^3dx$:

$$\int x^3\sqrt{1+9x^4}dx = \frac{1}{36}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{36}\int t^{1/2}dt = \frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2} = \frac{1}{54}(1+9x^4)^{3/2}.$$

Finalmente, aplicando la regla de Barrow:

$$A = 2\pi\frac{1}{54}(1+9x^4)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{27}(10^{3/2}-1) \approx 3'56.$$