Tema 3. FUNCIONES. CÁLCULO DIFERENCIAL.

Funciones

1. Estudiar la acotación de las siguientes funciones:

   (a) $y = 2x - 1$; (b) $y = \dfrac{1}{x}$; (c) $y = 2x - x^2$ (d) $y = \dfrac{1}{2 + x^4}$.

2. Estudiar la paridad o imparidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = -x - 2, \quad x \in (-\infty, -2)$;

   (b) $f(x) = x^3, \quad x \in [-2, 2]$;

   (c) $f(x) = -x^2, \quad x \in (2, \infty)$;

   (d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$;

   (e) $f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$;

   (f) $f(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$;

   (g) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$.

3. Tenemos una función f definida en $\mathbb{R}$, de la que se sabe que es par y periódica de periodo 2, y que $f(x) = 1 - x$, para $x \in [0, 1)$. Representarla gráficamente.

4. Representar las parábolas siguientes sobre un mismo eje de coordenadas.

   (a) $y = 3x^2$; (b) $y = -3x^2$; (c) $y = \dfrac{x^2}{4}$; (d) $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

5. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

6. Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales.

   (a) $y = 675^x$; (b) $y = \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$; (c) $y = 0{,}01^x$; (d) $y = 2{,}01^x$.

7. Indica cuáles de las anteriores funciones son crecientes o decrecientes.

8. Representa la función $y = \log_{1/10} x$ y a partir de dicha representación responde a las siguientes preguntas:

   (a) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?

   (b) ¿Pasa por el punto $(1, 0)$? ¿Y por el $(10, 1)$?

   (c) ¿Es acotada inferiormente? ¿Y superiormente?

9. Representa e indica las características más notables de las siguientes funciones.

   (a) $y = 3 + \operatorname{sen}(2x)$; (b) $y = 3\cos(4x)$.

10. Representa y estudia la simetría y periodicidad de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = 3 + \operatorname{sen} x; \quad \text{(b) } y = 2\operatorname{sen}(2\pi - x);$$

$$\text{(c) } y = \tfrac{1}{2}\cos(2x); \quad \text{(d) } y = \cos(2x - \pi/2).$$

11. Sea $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Calcular:

   a) $f(0), f(-x)$;

   b) $f(x+1), f(x)+1$;

   c) $f(1/x)$;

   d) $\dfrac{1}{f(x)}$.

12. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)}{(x^2-3x+2)(x^2-1)}$;

   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}}$;

   c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$;

   d) $f(x) = \sqrt[3]{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

13. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \ln(x+1) - \ln(3-x)$;

   b) $f(x) = \ln\dfrac{(x-1)}{(x+1)}$;

   c) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$.

14. Sean $f,\ g,\ h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2,\ g(x) = 2^x,\ h(x) = \operatorname{sen} x$. Calcular:

   a) $g \circ f$;

b) $f \circ g$;

c) $(f \circ g \circ h) + (h \circ g)$.

Derivadas

15. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \left(x^5 - 2x^3 + 3\right)^6$;

b) $y = (1 + x)(9 - x^2)$;

c) $y = \sqrt[3]{2x^2 - 5x + 7}$;

d) $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)}{(x+1)}}$.

16. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x(x^2-1)}$;

b) $y = \sqrt[5]{e^x + 1}$;

c) $y = \ln \dfrac{(x-1)}{(x+1)}$;

d) $y = x \ln^2(x - 1)$.

17. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \tan(x^2 + 2)$;

b) $y = \arcsin(\sqrt{x})$;

c) $y = x \arctan^2 x$;

d) $y = \ln(4x - \cos^5 x)$.

18. Calcular la derivada de las siguientes funciones definidas implícitamente:

a) $x^2 + y^2 = 25$;

b) $x^3 + y^3 = 6xy$;

c) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$;

d) $x \sin y + y \cos x = 1$;

e) $\cos(x + y) = y^2 \sin x$.

19. Dada la función $f(x) = \ln(1 + x)$, calcular $f^{'}, f^{''}$ y $f^{'''}$

20. Comprobar que $f(x)$ verifica la ecuación indicada en los siguientes casos:

a) $f(x) = e^x \sin x: \quad f^{''}(x) - 2f^{'}(x) + 2f(x) = 0$;

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right): \quad xf^{'}(x) + 1 = \dfrac{1}{1+x}$;

c) $f(x) = e^x + \ln(1-x)$: $\quad f^{''}(0) = 0$.

Cálculo de rectas tangentes

21. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 8$.

22. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$ en el punto de abscisa $x = \sqrt{-1 + \frac{\pi}{3}}$.

23. Hallar las ecuaciones de la rectas normal y tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ en el punto $(-5, 9/4)$.

24. Hallar las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ en el punto $(-1, 4\sqrt{2})$.

25. Hallar la ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2 + 5x$ que forma un ángulo de 45^0 con el eje OX.

26. Calcular los ángulos que forman en sus puntos de corte las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ y el eje X.

27. ¿Qué puntos de la curva $y = x^3 + 5$ tienen tangente paralela a la recta de ecuación $12x - y - 17 = 0$? ¿Y perpendicular a la recta $x + 3y - 2 = 0$?

28. Hallar la parábola de tipo $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(1, 1)$.

29. Demostrar que las dos curvas $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ y $2y + 5x - x^3y^2 + x^4 = 0$ se cortan perpendicularmente en el origen.

30. Demostrar que la elipse $9y^2 + 4x^2y = 45$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 5$ son ortogonales.

Crecimiento y decrecimiento de funciones

31. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;

    b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$;

    c) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$;

    d) $f(x) = e^{-x} \sin x$;

    e) $\arctan\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

Esbozar la gráfica de cada una de ellas.

32. Hallar los extremos de las siguientes funciones en los intervalos dados:

    a) $f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$ en $[-2, 2]$;

    b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ en $[-2, 2]$;

    c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ en $[0, 4]$;

    d) $f(x) = \sin(2x) - x$ en $[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}]$.

Optimización

33. Entre los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 12 cm. determinar el que tiene área máxima.

34. Una hoja rectangular de perímetro 36 cm se enrolla formando un cilindro. Determinar cuáles deberían ser las dimensiones de las hoja para que el volumen del cilindro sea máximo.

35. Dos conos rectos iguales de altura 20 cm y radio 5 cm se unen por sus bases. Inscribir en la figura un cilindro recto (coaxial con los conos) de forma que su superficie total sea máxima.

36. La base menor de un trapecio rectángulo mide 10 cm y el lado oblicuo 20 cm. Hallar el ángulo que debe formar dicho lado con la base mayor para que el área del trapecio resulte máxima.

37. Una ventana normanda tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 metros, calcular sus dimensiones para que admita la mayor cantidad posible de luz.

38. Se desea construir un aljibe rectangular con una capacidad de $36\ m^3$. Determinar las dimensiones del aljibe para que el coste sea mínimo, sabiendo que el coste del metro cuadrado de suelo es 3 veces el del techo, y el de las paredes laterales es 2