Tema 1. ÁLGEBRA MATRICIAL Y PROGRAMACIÓN LINEAL.

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   i) Hallar $(A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C)$ y compararlos.

   ii) Hallar $A + B$, $C \cdot (A + B)$, $C \cdot A + C \cdot B$. ¿Qué conclusión puede obtenerse de esto?

   iii) Hallar $A \cdot C$, $C \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, $(A - B)(A + B)$, $(A + B)(A - B)$ y $A^2 - B^2$.

2. Hallar todas las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a y b para que se verifique la ecuación $A^2 + aA + bI = 0$, siendo I la matriz identidad.

4. Hallar las matrices A y B que verifiquen

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$5A + 7B = \begin{pmatrix} 12 & 28 & 47 \\ 52 & 50 & 22 \end{pmatrix}$$

5. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar qué matrices pueden sumarse, y hallar la suma.

ii) Determinar qué matrices pueden multiplicarse, y hallar el producto.

6. Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

hallar $P \cdot Q$, $(P \cdot Q) \cdot R$, $Q \cdot R$, $P \cdot (Q \cdot R)$ y $P \cdot (R \cdot Q)$.

7. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hallar A^2, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $-3A + 8B$.

8. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Demostrar, aplicando las propiedades de los determinantes, que

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

es múltiplo de 15.

10. Hallar el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -5 & 2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -7 & -12 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 12 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 0 & 3 \\ 8 & 9 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

11. Expresar en forma matricial el sistema

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ y_2 &= 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ y_3 &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3\,. \end{aligned}$$

12. Discutir los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y-z &=& 1\\ 2x+y-z &=& 2\\ -x+2y-4z &=& -3\\ 2x+2y-4z &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y-z+5t &=& 0\\ 7x-3t &=& 0\\ 4z+t &=& 0\\ 2x-y+3z+3t &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x-5y+4z+u &=& -3\\ x-2y+z-u &=& 5\\ x-4y+6z+2u &=& 10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} x+y-z+t+v &=& 2\\ x-2y+t &=& 5\\ -x+z+2v &=& 3\\ 3y+z-2t &=& -1 \end{array}\right.$$

13. Resolver los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+3z-t &=& 5\\ x+2y-z-4t &=& 2\\ 7x+8y+3z-14t &=& 16 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} 3x-2y-z &=& 0\\ x+y-2z &=& 0\\ 2x-y-3z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x+y-z &=& -1\\ x-3y+z &=& -9\\ x-y+4z &=& 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} 4x-y-2z &=& 1\\ x+3y+z &=& 2\\ x-y+3z &=& -2 \end{array}\right.$$

14. Representar gráficamente el conjunto de puntos que verifican las siguientes inecuaciones:

    i) $y \geq x; y \geq 8; x-y \geq -2; 2x+5y \geq 50.$

    ii) $x \geq 0; 0 \leq y \leq 5; x-2y \leq 10, x+y \geq 10.$

    iii) $6 \leq y \leq 30; 5x+2y \leq 100; 6x+y \geq 30; x+2y \geq 20.$

    iv) $x \geq 0; y \geq 0; x \leq 4; x+2y \geq 2; 2y \leq x+2.$

15. Una empresa constructora cuenta con 60.000 m^2 disponibles para urbanizar. Decide construir dos tipos de viviendas unifamiliares: unas en parcelas de 200 m^2 que albergarán a familias con una media de cinco miembros y cuyo precio de venta será de 180.000 euros y otras con parcelas de 300 m^2 donde vivirán familias de una media de cuatro miembros que costarán 240.000 euros. Las autoridades del municipio imponen dos condiciones: el número de casas no puede superar las 225 y el número de habitantes esperado no puede superar el millar. ¿Cuántas viviendas de cada tipo se han de construir para maximizar los ingresos?

16. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas L_1 y L_2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para L_2, y un trabajo de máquina de 20 minutos para L_1 y de 10 minutos para L_2. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes, y para el de máquina de 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 2 euros y 1 euro, para L_1 y L_2, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

17. Una fábrica produce gasolina y gasoil en las siguientes condiciones: puede producir como máximo una tonelada de cada producto y el mínimo operativo es de 100 kg por producto. Los precios de venta son de 0.24 euros/kg la gasolina y de 0.18 euros/kg el gasoil. Si se produce un total de 1.700 kg, ¿cuál será la producción que maximiza los ingresos?

18. El director de servicio de aguas de una ciudad debe encontrar la forma de proporcionar 10 millones de galones de agua potable al día (mgd). El suministro puede ser proporcionado por el depósito local ó por medio de tuberías desde una ciudad vecina. El depósito local tiene un rendimiento diario de 5 mgd, que no puede ser sobrepasado. La tubería no puede abastecer a más de 10 mgd debido a su diámetro. Por otra parte, por acuerdos previos, la tubería debe aportar al menos 6 mgd. Finalmente, el agua del depósito cuesta 180 euros por cada millón de galones, mientras que el coste correspondiente por millón de galones, por tubería, es de 300 euros. ¿Cómo podría minimizarse el costo del suministro diario de agua?

19. Un instituto prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 guaguas de 40 plazas y 10 de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de una guagua grande cuesta 48 euros y el de una pequeña, 36 euros. Calcular cuántas guaguas de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible al instituto.

20. Con el comienzo del curso se van a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolos de dos formas distintas; en el primer bloque pondrán 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán de 3.6 euros y de 4.2 euros, respectivamente. ¿Cuántos paquetes les convienen poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

21. Una compañía posee dos minas: la mina A produce diariamente 1 tonelada de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 de baja calidad; la mina B produce cada día 2 toneladas de cada una de las tres calidades. La compañía necesita al menos, 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de mineral de calidad media y 200 de baja calidad. Sabiendo que el coste diario de la operación es de 1.200 euros en cada mina, ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el coste sea mínimo?

22. Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos: F_1 y F_2. Los de tipo F_1 cuestan 180 euros cada uno, y los de tipo F_2 cuestan 300 euros cada uno. Sólo tiene el espacio para almacenar 20 frigoríficos y dispone de 4.200 euros para hacer la compra. ¿Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo, teniendo en cuenta que debe comprar necesariamente de los dos tipos, para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que en cada frigorífico gana el 30 por ciento del precio de la compra? ¿Existe más de una solución?

23. Un orfebre fabrica tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 g de oro y 1.5 g de plata, vendiéndolas a 24 euros cada una. Para la fabricación de las del tipo B emplea 1.5 g

de oro y 1 g de plata, y las vende a 30 euros. El orfebre tiene sólo en el taller 750 g de cada uno de los metales. Calcular cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo.

24. Una cooperativa de guardias de seguridad de 12 personas está formada por 5 hombres y 7 mujeres. El trabajo lo pueden hacer de la siguiente forma: pareja de hombre y mujer a la que pagan a 30 euros la hora y el grupo de tres constituidos por un hombre y dos mujeres a los que le pagan a 36 euros la hora. ¿Cómo deben distribuirse para obtener el máximo beneficio?